Vorlesung “Mathematische Strukturen”

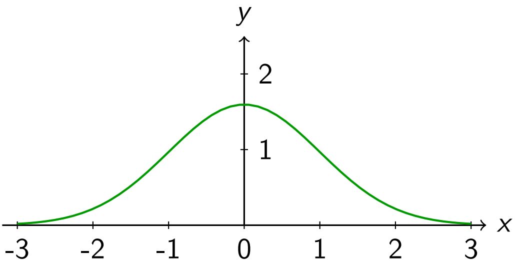
Sommersemester 2015

Prof. Barbara König
Übungsleitung: Dennis Nolte

Analysis

Analysis, Kurvendiskussion, Ableitbarkeit

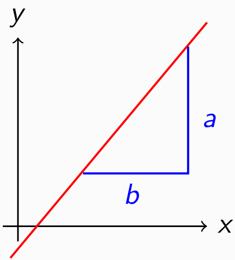
Wir betrachten Funktionen auf reellen Zahlen und wiederholen Grundlagen der Kurvendiskussion. Dabei gehen wir vor allem auf das Ableiten (= Differenzieren) von Funktionen ein.



Motivation

Die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist anschaulich ein Maß für die Steilheit bzw. den Grad des Wachstums.

Steigung einer Geraden



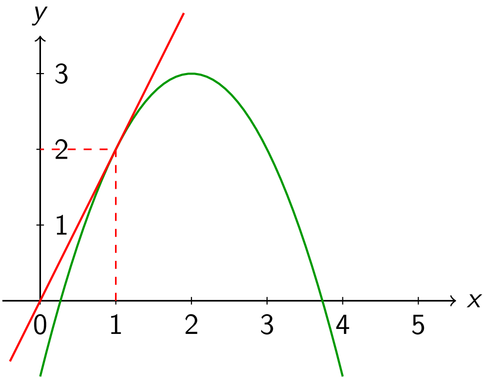
Für ein rechtwinkliges Dreieck (mit Katheten parallel zur x- und y-Achse) unterhalb der Geraden bestimmt man die Länge der Katheten: a, b

Steigung der Geraden: $\frac{a}{b}$

Dabei ist es unerheblich, wo das Dreieck liegt und wie groß es ist. Man erhält immer denselben Wert.

Motivation

Um die Steigung einer Kurve in einem Punkt zu bestimmen, bestimmen wir die Tangente an diesem Punkt, d.h. eine Gerade, die die Kurve in diesem Punkt berührt. Die Steigung der Tangente ist dann die Steigung der Kurve.



Motivation

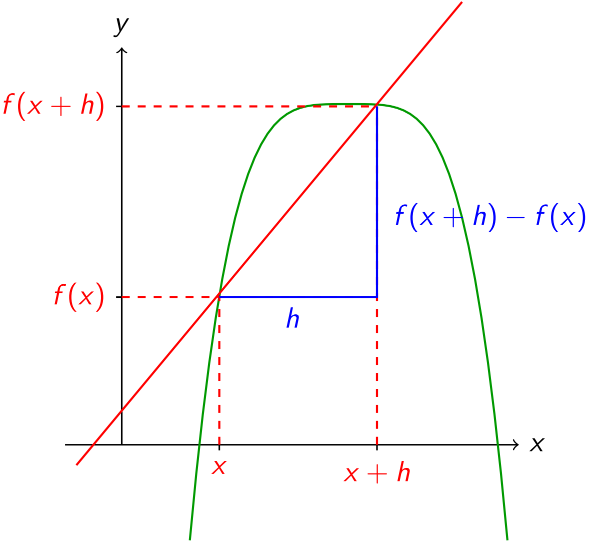
Es ist jedoch nicht offensichtlich, wie die Steigung der Tangente berechnet werden soll.

Wir nehmen an, dass die Kurve der Graph einer reellwertigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Wir wollen die Steigung in x bestimmen, d.h. eine Tangente durch den Punkt $(x, f(x))$ legen.

Vorgehen:

- Bestimme (für beliebiges $h \in \mathbb{R}$) einen weiteren Punkt $(x+h, f(x+h))$ und lege eine Gerade durch diese beiden Punkte.
  Die Steigung der Gerade ist: $\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Lasse h gegen 0 gehen (d.h. h wird immer kleiner). Dann nähert sich die Steigung der Geraden immer mehr der Steigung der Tangenten an.

Motivation



Grenzwerte

Um dies genauer beschreiben zu können und um konkrete Steigungen berechnen zu können, benötigen wir den Begriff des Grenzwerts oder Limes.

Beispiel:

Die Funktion

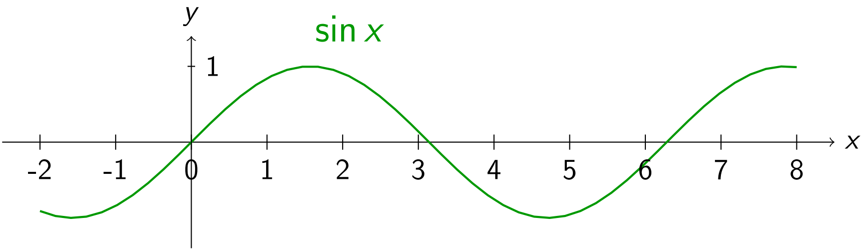
$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ist nicht für Null definiert. (Es ist auch nicht möglich, den Definitionsbereich zu erweitern, da durch 0 dividiert wird.)

Bei Betrachtung des Funktionsgraphen scheint sich jedoch der Funktionswert von f für x gegen 0 beliebig der 1 zu nähern.

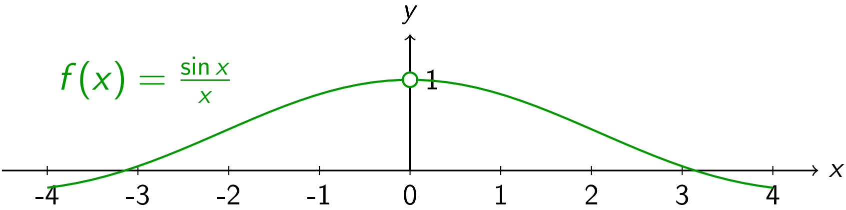
Grenzwerte

Zur Erinnerung: Graph der Sinusfunktion



Grenzwerte

Graph der Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



Wir wollen ausdrücken können, dass der Grenzwert von f für x gegen 0 gleich 1 ist.

Grenzwerte

Grenzwert einer Funktion

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und seien $x_0, a \in \mathbb{R}$. Angenommen, es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes $x \in X$ mit $|x_0 - x| < \delta$ folgt, dass $|a - f(x)| < \varepsilon$.

Dann ist a der Grenzwert (oder Limes) von f für x gegen x_0 und man schreibt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Bemerkungen:

- Die Werte ε, δ sind reelle Zahlen.
- $|z|$ bezeichnet den Absolutwert der Zahl $z \in \mathbb{R}$:

$$|z| = \begin{cases} z & \text{falls } z \geq 0 \\ -z & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispielsweise: $|7| = 7$, $|0| = 0$, $|-3| = 3$

Grenzwerte

Bemerkungen:

- Anschaulich sagt die Grenzwert-Definition: der Abstand zwischen $f(x)$ und a wird beliebig klein (beschrieben durch ε), wenn x nur nahe genug bei x_0 liegt (beschrieben durch δ).
- Für eine Funktion f und ein gegebenes x_0 muss nicht notwendigerweise ein Grenzwert existieren. (Gegenbeispiel später.)

Grenzwerte

Um zu zeigen, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ gilt, benötigen wir noch folgende Abschätzung (ohne Beweis): für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x - \sin x| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

Daraus folgt für $x \neq 0$:

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|x - \sin x|}{|x|} \leq \frac{|x|^2}{6}.$$

Das heißt, wenn wir für ein $\varepsilon \leq 6$ erreichen wollen, dass $|1 - \frac{\sin x}{x}| < \varepsilon$ gilt, dann reicht es, $\delta = \varepsilon$ zu setzen. Denn für ein x mit $|0 - x| = |x| < \delta$ gilt:

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{|x|^2}{6} < \frac{\delta^2}{6} \leq \delta = \varepsilon.$$

(Für $\varepsilon > 6$ kann man $\delta = 6$ setzen.)

Grenzwerte

Der Begriff des Grenzwerts macht nur Sinn für sogenannte Häufungspunkte von X.

Häufungspunkt

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von X, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ gibt mit $x \neq x_0$ und $|x_0 - x| < \varepsilon$.

D.h. ein Häufungspunkt von X ist eine Zahl, in deren Umgebung unendlich viele Elemente von X sind, die beliebig nahe an x_0 liegen.

Ist x_0 kein Häufungspunkt von x, dann gibt es keine Möglichkeit, x_0 beliebig nahe zu kommen und die Grenzwert-Definition macht keinen Sinn.

Beispiel: Die Zahl $x_0 = 0$ ist ein Häufungspunkt von $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Grenzwerte

Rechnen mit Grenzwerten

Gegeben seien zwei Funktionen $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, wobei $X \subseteq \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass beide Funktionen einen Grenzwert in $x_0 \in \mathbb{R}$ haben:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = b$$

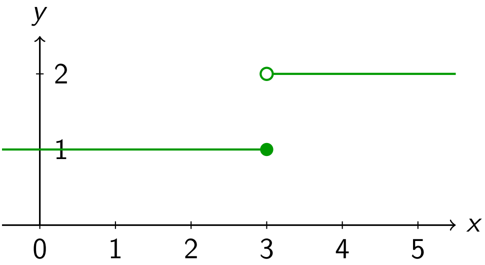
Außerdem sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) &= c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot a \\
\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = a + b \\
\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = a - b \\
\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = a \cdot b
\end{aligned}$$

Stetigkeit

Manche Funktionen machen “Sprünge”, beispielsweise folgende Funktion g:

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \le 3 \\ 2 & \text{falls } x > 3 \end{cases}$$



Anschaulich bezeichnen wir eine Funktion als stetig, wenn sie keine solchen Sprungstellen besitzen.

Stetigkeit

Stetigkeit

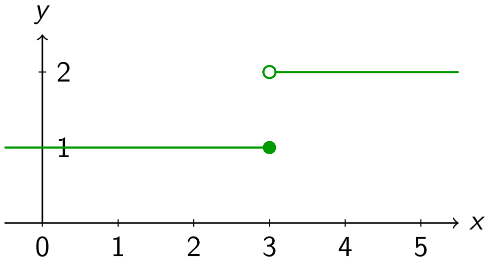
Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in X$, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ definiert ist und außerdem gleich $f(x_0)$ ist ($\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$). Die Funktion f heißt stetig, wenn sie für jedes $x_0 \in X$ stetig ist.

Anschaulich: wenn man sich dem Wert x_0 (von links oder rechts nähert) und Funktionswerte bildet, so erhält man im Grenzwert genau den Wert $f(x_0)$.

Für stetige Funktion gilt also immer: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h., man erhält den Grenzwert einfach durch Einsetzen in die Funktion.

Stetigkeit

Beispiel: sei $x_0 = 3$. Wenn man sich von rechts x_0 nähert, dann nähert man sich *nicht* dem Funktionswert $g(x_0) = 1$.



Genauer: für $\varepsilon < 1$ gibt es kein δ, so dass aus $|x_0 - x| = |3 - x| < \delta$ auch $|g(x_0) - g(x)| = |1 - g(x)| < \varepsilon$ folgt. Beispielsweise gilt für $x = 3 + \frac{\delta}{2}$ immer $g(x) = 2$ und damit $|1 - g(x)| = 1 > \varepsilon$.

Damit existiert kein Grenzwert $\lim_{x \to 3} g(x)$.

Stetigkeit

Weiteres Beispiel:

Man kann die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

stetig fortsetzen, d.h., eine Funktion $\overline{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstruieren, die

- auf allen reellen Zahlen definiert ist,
- auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit f übereinstimmt *und*
- stetig ist.

Dabei ist $\overline{f}$ wie folgt definiert:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig, denn $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Bestimmung der Ableitung

Mit Hilfe des Grenzwert-Begriffs kann man nun die Steigung einer Funktion f definieren. Die entstehende Funktion f', die zu jedem x-Wert die Steigung an der jeweiligen Stelle angibt, heißt Ableitung. Die Bestimmung von f' bezeichnet man auch als Ableiten bzw. Differenzieren.

Ableitung

Eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt differenzierbar (oder ableitbar) an der Stelle $x \in X$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Dieser wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Eine Funktion heißt differenzierbar, wenn sie für alle $x \in X$ differenzierbar ist. Die dabei entstehende Funktion $f' \colon X \to \mathbb{R}$ wird als Ableitung bezeichnet.

Bestimmung der Ableitung

Bemerkungen:

- Statt $f'(x)$ schreibt man manchmal auch $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ oder $\frac{df}{dx}(x)$.
  Dabei steht dx für die Distanz zwischen Werten auf der x-Achse und $df(x)$ für die Distanz zwischen Funktionswerten.
- Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.

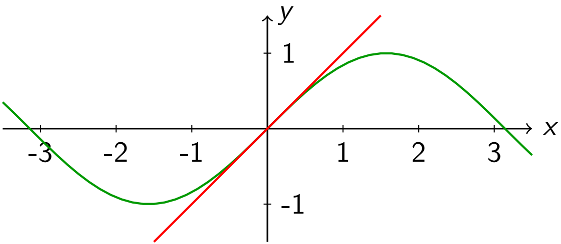
Bestimmung der Ableitung

Beispiel:

Wir bestimmen die Ableitung der Sinusfunktion an der Stelle $x = 0$.

$$\sin' 0 = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Folgende Abbildung stellt die Tangente an der Sinuskurve an der Stelle 0 dar. Diese Tangente hat Steigung 1.



Bestimmung der Ableitung

Ableitung einer konstanten Funktion

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Ableitung der Identitätsfunkion

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Bestimmung der Ableitung

Ableitung einer (Normal-)Parabel

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Ableitung

Ableitung von $f(x) = x^n$

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = \binom{n}{1} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

Die Berechnung basiert auf folgenden zwei Beobachtungen:

- der binomischen Formel für $(x+h)^n$ mit Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (siehe Kombinatorik Binomische Formel);
- das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, da nur der Summand für $k=1$ keinen Faktor h enthält. Alle anderen Summanden enthalten ein h und werden zu 0, wenn h gegen 0 geht.

Bestimmung der Ableitung

Bemerkung:

Auch für $f(x) = x^c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist, gilt $f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.

D.h. für $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ableitungen bekannter Funktionen

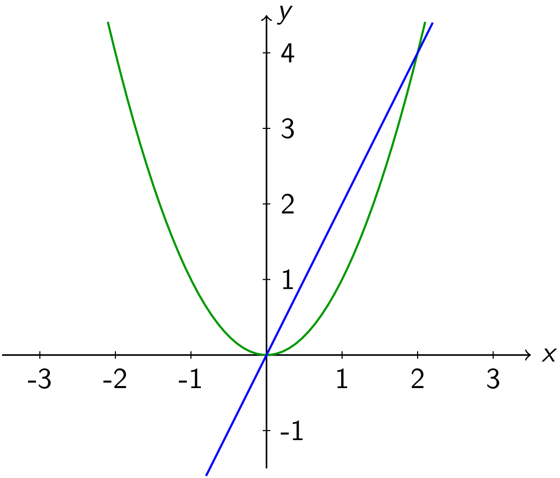
Folgende Tabelle enthält die Ableitungen weiterer bekannter Funktionen. Dabei ist $a \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

- e: Eulersche Zahl ($\approx 2,718281\dots$)
- $\ln x$: Logarithmus naturalis (Logarithmus zur Basis e)
- $\log_a x$: Logarithmus zur Basis a (bezeichnet die eindeutig bestimmte Zahl $y \in \mathbb{R}$ für die gilt $a^y = x$)

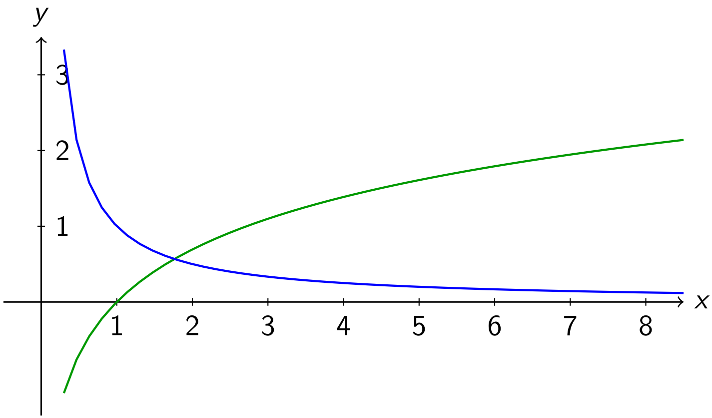
Ableitungen bekannter Funktionen

Beispiel 1: Graph der Parabel ($f(x) = x^2$) und ihre Ableitung ($f'(x) = 2x$).



Ableitungen bekannter Funktionen

Beispiel 2: Graph des Logarithmus naturalis ($f(x) = \ln x$) und seiner Ableitung ($f'(x) = \frac{1}{x}$) (auf den positiven reellen Zahlen).



Ableitungsregeln

Wenn man die Ableitungen bestimmter Funktionen kennt, kann man daraus – nach einer Art Baukastenprinzip – weitere Ableitungen konstruieren. Dafür gelten die unten aufgeführten Regeln.

Faktorregel

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitung f' und sei $g\colon X \to \mathbb{R}$ definiert als $g(x) = c \cdot f(x)$ für $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$g'(x) = (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

Ableitungsregeln

Beweis der Faktorregel:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h}\\ &= c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\cdot f'(x)\end{aligned}$$

Für das vorletzte Gleichheitszeichen siehe Rechnen mit Grenzwerten.

Ableitungsregeln

Bemerkung:

Wir verwenden im Weiteren häufiger Abkürzungen wie $c \cdot f$ (Produkt einer Funktion mit einer Konstante c).

Ebenso schreiben wir $f + g$ und $f \cdot g$ für die punktweise Addition und Multiplikation von zwei Funktionen. Dabei gilt $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Bereits eingeführt wurde die Notation $f \circ g$ (Verknüpfung von Funktionen ▸ Verknüpfung).

Ableitungsregeln

Summenregel

Seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Ableitungen f', g' und sei $k\colon X \to \mathbb{R}$ definiert als $k(x) = f(x) + g(x)$. Dann gilt:

$$k'(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-k(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
= \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &+ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Für das vorletzte Gleichheitszeichen siehe wieder

.

Ableitungsregeln

Produktregel

Seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Ableitungen f', g' und sei $k\colon X \to \mathbb{R}$ definiert als $k(x) = f(x) \cdot g(x)$. Dann gilt:

$$k'(x) = (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Auch zum Beweis der Produktregel benötigt man die Rechenregeln für Grenzwerte ▸ Rechnen mit Grenzwerten:

Ableitungsregeln

Beweis der Produktregel:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \Bigg(\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
& \qquad + \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x)}{h} \Bigg) \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x) + f(x+h) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) \\
= \quad & \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) \cdot g(x) \\
& + \left(\lim_{h\to 0} f(x+h) \right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) \\
= \quad & f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Ableitungsregeln

Wir betrachten nun Anwendungen der bisher eingeführten Ableitungsregeln für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für die Ableitung eines Polynoms verwendet man die Faktor- und die Summenregel.

Ableiten eines Polynoms

Sei $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt:

$f'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1$

Beispiel:

Die Ableitung von $f(x) = x^5 - 2x^3$ ist $f'(x) = 5x^4 - 6x^2$.

Ableitungsregeln

Beispiel für die Anwendung der Produktregel:

Die Ableitung von $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ ist

$$f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot \ln(2) \cdot 2^x = (2x + \ln(2) \cdot x^2) \cdot 2^x.$$

Ableitungsregeln

Kettenregel

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Ableitungen f', g' und sei $k\colon X \to \mathbb{R}$ definiert als $k(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Dann gilt:

$$k'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(Ohne Beweis)

Ableitungsregeln

Beispiel für die Anwendung der Kettenregel:

Die Ableitung von $f(x) = 2^{x^2}$ ist

$$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{x^2} \cdot 2x = 2 \cdot \ln(2) \cdot x \cdot 2^{x^2}$$

Bemerkung:

Die Multiplikation mit dem Faktor $g'(x)$ bei der Kettenregel bezeichnet man manchmal auch als "Nachdifferenzieren".

Ableitungsregeln

Durch die Kombination der Kettenregel und der Beziehung $\frac{d}{dx}x^c = c \cdot x^{c-1}$ ergibt sich die Kehrwertregel.

Kehrwertregel

Sei $g\colon X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktionen mit Ableitung g' und sei $k\colon X \to \mathbb{R}$ definiert als $k(x) = \frac{1}{g(x)}$. Dann gilt:

$$k'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2},$$

falls $g(x) \neq 0$.

Beweis:

$$k'(x) = \frac{d}{dx}g(x)^{-1} = (-1) \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

Ableitungsregeln

Wenn man nun die Kehrwertregel mit der Produktregel kombiniert, erhält man die Quotientenregel.

Quotientenregel

Seien $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Ableitungen f', g' und sei $k\colon X \to \mathbb{R}$ definiert als $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Dann gilt:

$$k'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2},$$

falls $g(x) \neq 0$.

Ableitungsregeln

Beweis der Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
k'(x) &= \frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)\\
&= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)\\
&= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

Ableitungsregeln

Beispiel:

Die Ableitung von $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist

$$f'(x) = \frac{(\cos x) \cdot x - (\sin x) \cdot 1}{x^2} = \frac{(\cos x) \cdot x - (\sin x)}{x^2}$$

für $x \neq 0$.

Mehrfache Ableitungen

Man kann Ableitungen nochmal differenzieren und erhält dann die zweite Ableitung, dritte Ableitung, ...

n-te Ableitungen

Für eine differenzierbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir Funktionen $f^{(n)}\colon X \to \mathbb{R}$ mit:

$$f^{(0)}(x) = f(x) \qquad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$$

Dabei wird gefordert, dass jede Funktion $f^{(n)}$ wiederum differenzierbar ist.

Für das Polynom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = x^2 + 3x - 2$ gilt:
0-te Ableitung: die Funktion p selbst, d.h. $p^{(0)} = p$
1-te Ableitung: $p^{(1)}(x) = p'(x) = 2x + 3$
2-te Ableitung: $p^{(2)}(x) = p''(x) = 2$
3-te und weitere Ableitungen: $p^{(3)}(x) = p^{(4)}(x) = \cdots = 0$

Kurvendiskussion

Da die Ableitung einer Funktion f deren Steigung beschreibt, kann man aus ihr Schlüsse über die Funktion ziehen:

Schlüsse aus der ersten Ableitung

- $f'(x) > 0$: Funktion f steigt an der Stelle x
- $f'(x) < 0$: Funktion f fällt an der Stelle x

Schlüsse aus der zweiten Ableitung

- $f''(x) > 0$: Ableitung f' steigt an der Stelle x, d.h., f ist an der Stelle x linksgekrümmt
- $f''(x) < 0$: Ableitung f' fällt an der Stelle x, d.h., f ist an der Stelle x rechtsgekrümmt

Kurvendiskussion

Mit Hilfe der Ableitungen kann man auch Aussagen über die Extrema, d.h. Minima und Maxima, einer Funktion machen.

Lokale Extrema

Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}$ hat an der Stelle x_0 ein lokales Minimum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle x mit $|x_0 - x| < \varepsilon$.

Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}$ hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x_0) \geq f(x)$ für alle y mit $|x_0 - x| < \varepsilon$.

Lokale Minima und Maxima heißen auch lokale Extrema.

Ein lokales Minimum (Maximum) ist nicht notwendigerweise auch ein globales Minimum (Maximum) der Funktion.

Kurvendiskussion

Lokale Extrema und erste Ableitungen

Hat eine differenzierbare Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, so muss an dieser Stelle $f'(x_0) = 0$ gelten.

Anschauliche Begründung: bei einem Extremum wechselt die Steigung einer Funktion von negativ nach positiv (oder umgekehrt) und muss daher an dieser Stelle den Wert 0 einnehmen.

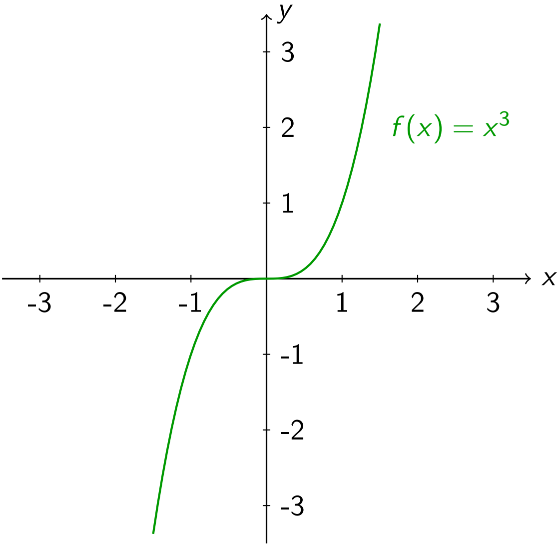
Kurvendiskussion

Bemerkung:

Allerdings gibt es Nullstellen der ersten Ableitung, an denen die Funktion kein Extremum einnimmt, sondern einen sogenannten Sattelpunkt (eine Stelle mit Steigung 0, an der aber kein Extremum vorliegt).

Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$ und es gilt $f'(0) = 0$. Jedoch gibt es an der Stelle $x_0 = 0$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum (siehe Abbildung).

Kurvendiskussion



Kurvendiskussion

Die allgemeine Regel für die Bestimmung von lokalen Minima und Maxima lautet wie folgt:

Lokale Extrema und *n*-te Ableitungen

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f^{(n)}\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ihre n-ten Ableitungen. Für $x_0 \in X$ gilt $f'(x_0) = 0$ und $n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{0\}$ ist die kleinste Zahl, für die $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ gilt. Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

- n ist gerade:
  - $f^{(n)}(x_0) < 0 \rightsquigarrow$ lokales Maximum an der Stelle x_0
  - $f^{(n)}(x_0) > 0 \rightsquigarrow$ lokales Minimum an der Stelle x_0
- n ist ungerade $\rightsquigarrow$ Sattelpunkt an der Stelle x_0

Kurvendiskussion

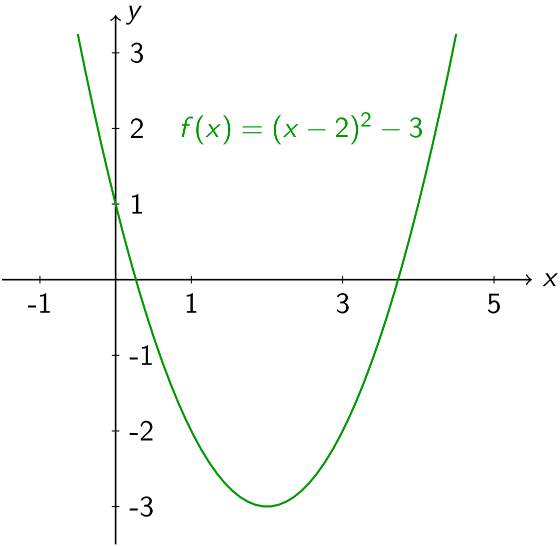
Beispiel 1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-2)^2 - 3$

1-te Ableitung: $f'(x) = 2 \cdot (x-2) = 2x - 4$, Nullstelle bei $x = 2$

2-te Ableitung: $f''(x) = 2$, $f''(2) = 2 > 0$

D.h., es gibt ein (lokales) Minimum an der Stelle $x = 2$ mit Funktionswert $f(2) = -3$.

Kurvendiskussion



Kurvendiskussion

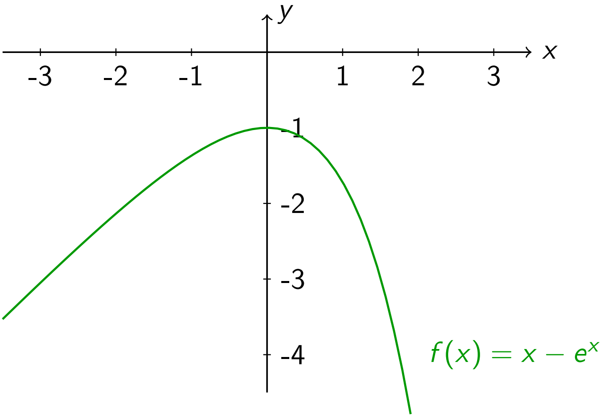
Beispiel 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - e^x$

1-te Ableitung: $f'(x) = 1 - e^x$, Nullstelle bei $x = 0$

2-te Ableitung: $f''(x) = -e^x$, $f''(0) = -1 < 0$

D.h., es gibt ein (lokales) Maximum an der Stelle $x = 0$ mit Funktionswert $f(0) = -1$.

Kurvendiskussion



Kurvendiskussion

Beispiel 3: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^5 - 2x^3$

1-te Ableitung: $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 = 5x^2(x^2 - \frac{6}{5})$, Nullstellen bei

$$x = 0,\ x = -\sqrt{\frac{6}{5}} \text{ und } x = \sqrt{\frac{6}{5}} \qquad \left(\sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1,095\dots\right)$$

2-te Ableitung: $f''(x) = 20x^3 - 12x$, es gilt

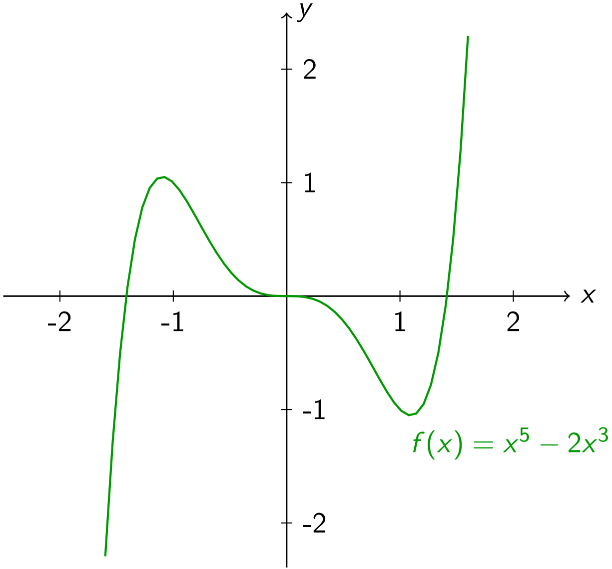
$$f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \approx -13,145\dots < 0,$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \approx 13,145\dots > 0,\ f''(0) = 0$$

3-te Ableitung: $f'''(x) = 60x^2 - 12$, $f'''(0) = -12$

D.h., es gibt ein lokales Maximum an der Stelle $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$, ein lokales Minimum an der Stelle $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$ und einen Sattelpunkt an der Stelle $x = 0$.
Die lokalen Extrema sind hier keine globalen Extrema.

Kurvendiskussion



Kurvendiskussion

Wendepunkte

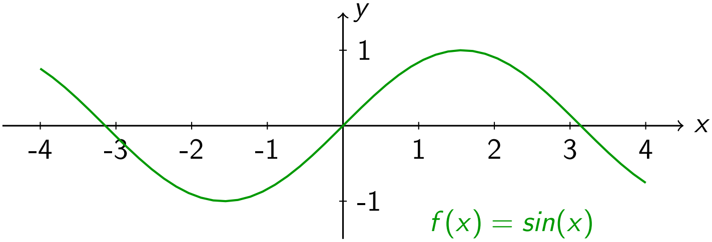
Sei $f: X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in X$, d.h., die zweite Ableitung ist gleich null und die dritte Ableitung ungleich Null.

Dann gibt es an dieser Stelle einen Wendepunkt, bei dem die Kurve ihre Krümmung ändert (von links- auf rechtsgekrümmt oder umgekehrt).

Kurvendiskussion

Beispiel 1:

Die Sinuskurve hat (unter anderem) einen Wendepunkt an der Stelle $x_0 = 0$.



Kurvendiskussion

Beispiel 2:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-1) \cdot x \cdot (x+1) = x^3 - x$ hat (genau) einen Wendepunkt, und zwar an der Stelle $x_0 = 0$.