Vorlesung "Mathematische Strukturen"

Sommersemester 2015

Prof. Barbara König
Übungsleitung: Dennis Nolte

Kombinatorik: Einführung

Es folgt eine Einführung in die Kombinatorik.

Dabei geht es darum, die Elemente einer Menge zu zählen. Dabei ist die Größe der Menge nicht fest (sonst wäre das ja einfach!), sondern abhängig von bestimmten Parametern.

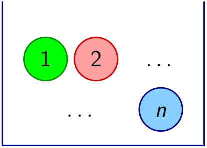
Anwendungsbeispiele:

- Anzahl der Zustände bzw. Anzahl der Abläufe in einem System zählen. (Wichtig für Systeme der Informatik, in denen die Anzahl der Systemzustände sehr groß werden kann.)
- Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten eines Ereignisses berechnen. (Wichtig für Statistik.)

Ziehen aus Urnen

Angenommen, wir haben eine Urne (einen großen Behälter), in der n durchnumerierte (und daher unterscheidbare) Kugeln liegen. Aus dieser Urne werden k Kugeln gezogen.

Die Frage ist: wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, Kugeln zu ziehen?



Mit Hilfe dieser Metapher lassen sich viele Zählprobleme erfassen.

Ziehen aus Urnen

Die Antwort: das hängt davon ab ...

Es hängt insbesondere davon ab, wie die Regeln festgelegt werden:

- Werden die Kugeln nach dem Ziehen wieder in die Urne gelegt? (Ziehen mit/ohne Zurücklegen)
- Wird die Reihenfolge des Ziehens gewertet? (mit/ohne Beachtung der Reihenfolge)

  Beispiel: Ist die Sequenz $1, 5, 7$ gleichbedeutend mit $7, 1, 5$?

Ziehen aus Urnen

Beispiel 1: Lottozahlen

Bei der Ziehung der Lottozahlen werden die Kugeln nicht zurückgelegt und die Reihenfolge nicht beachtet. Es ist egal, ob eine Zahl vor oder nach einer anderen Zahl gezogen wird.

Die Parameter sind $n = 49$ und $k = 6$ (6 aus 49).

Beispiel 2: Würfeln mit drei (identischen) Würfeln

Das kann man als das Ziehen von $k = 3$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 6$ Kugeln interpretieren. Hierbei werden die Kugeln zurückgelegt und die Reihenfolge ebenfalls nicht betrachtet.

Beim Ziehen mit Zurücklegen kann eine Zahl durchaus auch mehrfach auftreten. Dieses mehrfache Auftreten spielt (im Unterschied zu Mengen) eine Rolle. Das Würfelergebnis $3, 3, 6$ ist verschieden von $3, 6, 6$.

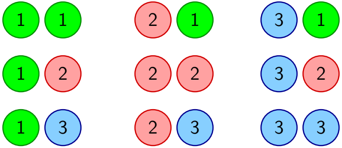
Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Wir beginnen mit folgendem Fall:

> Ziehe k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln, mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge.

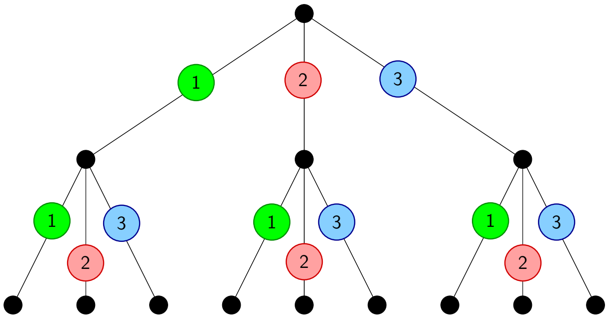
Angenommen, die Urne enthält $n = 3$ drei Kugeln: 

Dann gibt es folgende neun Möglichkeiten, $k = 2$ Kugeln aus der Urne zu ziehen:



Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Diese neun Möglichkeiten kann man auch als Entscheidungsbaum darstellen:

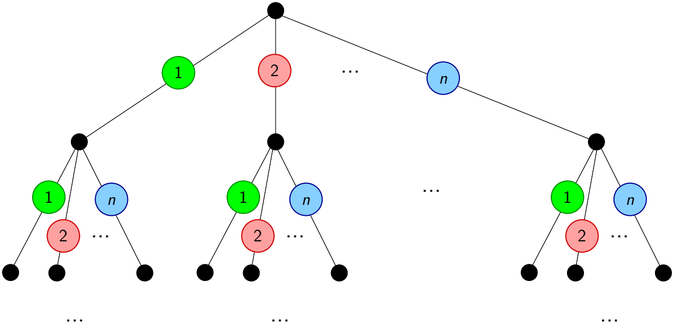


3 Entscheidungsmöglichkeiten auf der ersten Ebene, ergibt dreimal 3 Entscheidungsmöglichkeiten auf der zweiten Ebene.

Damit hat man insgesamt $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ Fälle.

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Im allgemeinen Fall:



Auf der ersten Ebene: n Entscheidungsmöglichkeiten

Auf der zweiten Ebene: $n \cdot n$ Entscheidungsmöglichkeiten

...

Auf der k-ten Ebene: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k$ Möglichkeiten

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Ziehen mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge

Für das Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge ergeben sich

$$n^k \text{ Möglichkeiten,}$$

falls sich n (verschiedene) Kugeln in der Urne befinden und k Kugeln gezogen werden.

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Anwendungen:

Gegeben seien zwei endliche Mengen A, B. Wieviele Funktionen zwischen A und B gibt es?

Beispiel: sei A eine Menge von Personen und B eine Menge von Räumen. Wieviele Möglichkeiten gibt, jeder Person einen Raum zuzuordnen? (Dabei müssen nicht notwendigerweise alle Räume verwendet werden und mehreren Personen kann der gleiche Raum zugeteilt werden.)

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Wieviele Funktionen zwischen A und B gibt es? (Fortsetzung)

Wir nehmen an, dass $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ mit $k = |A|$ und $n = |B|$. Wir können B als Urne betrachten, aus der nacheinander k Elemente gezogen werden (mit Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge).

D.h., zunächst wird ein Element aus B gezogen, das a_1 zugeordnet wird, dann wird ein weiteres Element gezogen, das a_2 zugeordnet wird, etc.

Insgesamt erhält man n^k Funktionen zwischen den Mengen A und B.

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Bemerkung: Beim Zählen von Möglichkeiten erhält man leicht sehr große Zahlen (sogenannte Zustandsexplosion).

Beispiel: eine Bedienoberfläche enthält 10 Elemente (Widgets, wie beispielsweise Radio Buttons, Drop-down-lists, ...), von denen sich jedes in 5 verschiedenen Zuständen befinden kann, die unabhängig voneinander einstellbar sind.

In wievielen Zuständen kann sich die Oberfläche insgesamt befinden?

Antwort: Ziehen von 10 Kugeln aus einer Urne mit 5 Kugeln (mit Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge).

Insgesamt erhält man $5^{10} = 9.765.625$ Möglichkeiten.

Es ist sehr schwierig, diese fast 10 Millionen Zustände alle durchzuprobieren, um festzustellen, dass sich die unter der Benutzeroberfläche liegende Software immer korrekt verhält.

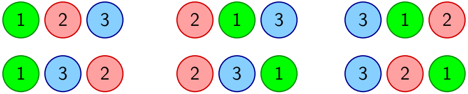
Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Wir betrachten nun folgenden Fall:

> Ziehe k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln, ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge.
>
> Dieser Fall macht nur Sinn, falls $k \leq n$.

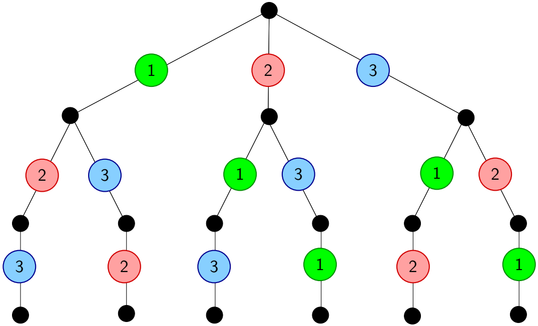
Angenommen, die Urne enthält $n = 3$ drei Kugeln: 

Dann gibt es folgende sechs Möglichkeiten, $k = 3$ Kugeln aus der Urne zu ziehen:



Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Diese sechs Möglichkeiten kann man auch als Entscheidungsbaum darstellen:

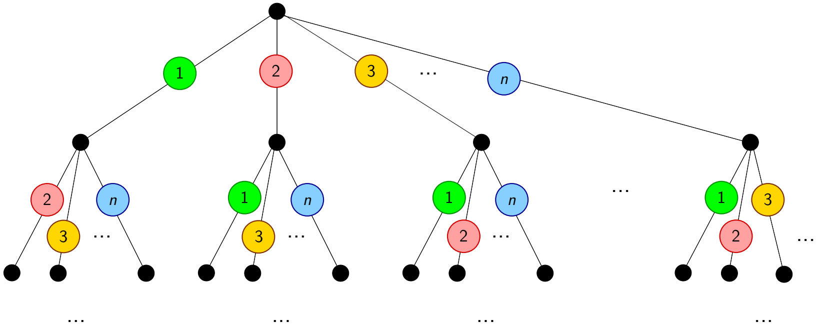


3 Entscheidungsmöglichkeiten auf der ersten Ebene, ergibt:
$3 \cdot 2$ Entscheidungsmöglichkeiten auf der zweiten Ebene *und*
$3 \cdot 2 \cdot 1$ Entscheidungsmöglichkeiten auf der dritten Ebene.

Damit hat man insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Fälle.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Wir betrachten den allgemeinen Fall, zunächst für $n = k$:



Auf der ersten Ebene: n Entscheidungsmöglichkeiten
Auf der zweiten Ebene: $n \cdot (n-1)$ Entscheidungsmöglichkeiten
...
Auf der k-ten Ebene: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Fakultätsfunktion

Die Funktion, die $n \in \mathbb{N}_0$ auf

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

abbildet, wird als Fakultätsfunktion bezeichnet. Man schreibt:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Für $n = 0$ wird $0! = 1$ festgelegt.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

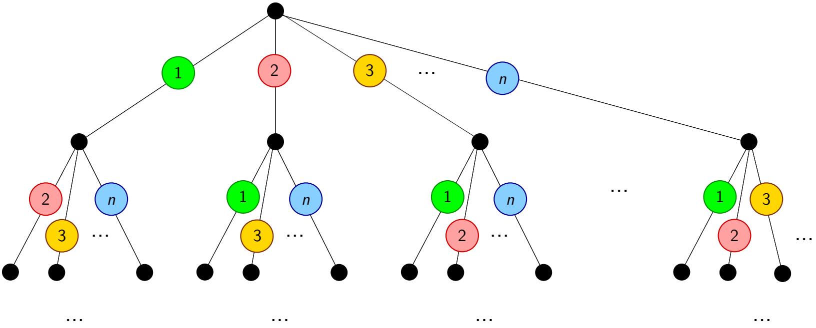
Wertetabelle:

n	$n!$	n	$n!$
0	1	5	120
1	1	6	720
2	2	7	5040
3	6	8	40320
4	24	9	362880

Man sieht, dass die Fakultätsfunktion ungeheuer schnell wächst.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Im allgemeinen Fall hat man beim letzten Ziehen noch $n - k + 1$ Kugeln übrig:



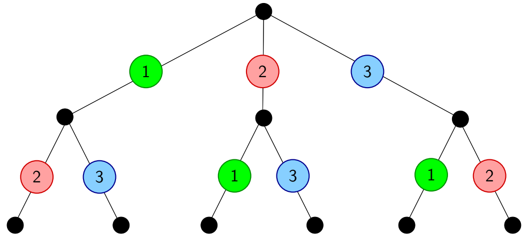
Auf der ersten Ebene: n Entscheidungsmöglichkeiten

...

Auf der k-ten Ebene: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Beispiel: es sind $n = 3$ Kugeln in der Urne, von denen $k = 2$ gezogen werden:



Im letzten Schritt sind noch $2 = n - k + 1$ Kugeln übrig.

Warum? $\rightsquigarrow$ Zum Schluss sind $n - k$ Kugeln übrig, wir befinden uns einen Schritt vorher.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

n hoch k fallend

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Der Ausdruck

$$n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

wird n hoch k fallend gelesen.

Für den Fall $k = 0$ setzt man $n^{\underline{0}} = 1$. (Das gilt auch, falls $n = 0$.)

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 1} \\ &= n \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\ &= n^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Ziehen ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge

Für das Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge ergeben sich

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ Möglichkeiten,}$$

falls sich n (verschiedene) Kugeln in der Urne befinden und $k \leq n$ Kugeln gezogen werden.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Anwendungen:

Gegeben seien zwei endliche Mengen A, B. Wieviele injektive Funktionen zwischen A und B gibt es?

Beispiel: sei A eine Menge von Personen und B eine Menge von Räumen. Wieviele Möglichkeiten gibt, jeder Person einen Raum zuzuordnen, so dass sich in einem Raum höchstens eine Person befindet?

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Wieviele injektive Funktionen zwischen A und B gibt es?
(Fortsetzung)

Wir nehmen an, dass $k = |A|$ mit $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $n = |B|$.
Wir können B als Urne betrachten, aus der nacheinander k Elemente gezogen werden, ohne dass Elemente zurückgelegt werden (jedoch mit Beachtung der Reihenfolge).
(Kein Element im Wertebereich darf mehr als einem Element im Definitionsbereich zugeordnet werden!)

Insgesamt erhält man $n^{\underline{k}}$ injektive Funktionen zwischen den Mengen A und B.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Beispiel: gegebenen seien n Städte, die alle der Reihe nach besucht werden sollen (Problem des Handlungsreisenden). Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Städte zu besuchen?

Wir legen n mit den Namen Städte beschriftete Kugeln in eine Urne und ziehen nacheinander n Kugeln.

Insgesamt hat man $n^{\underline{n}} = n!$ Möglichkeiten.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Beispiel (Fortsetzung):

Nehmen wir an, die Städte wären Duisburg (DU), Essen (E), Bochum (BO), Dortmund (DO). Dann gibt es $4! = 24$ Möglichkeiten:

DU E BO DO	E DU BO DO	BO DU E DO	DO DU E BO
DU E DO BO	E DU DO BO	BO DU DO E	DO DU BO E
DU BO E DO	E BO DU DO	BO E DU DO	DO E DU BO
DU BO DO E	E BO DO DU	BO E DO DU	DO E BO DU
DU DO E BO	E DO DU BO	BO DO DU E	DO BO DU E
DU DO BO E	E DO BO DU	BO DO E DU	DO BO E DU

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Wir betrachten nun folgenden Fall:

> Ziehe k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln, ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge.
>
> Dieser Fall macht wiederum nur Sinn, falls $k \leq n$.

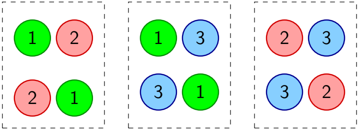
Angenommen, die Urne enthält $n = 3$ Kugeln: 1 2 3

Dann gibt es folgende drei Möglichkeiten, $k = 2$ Kugeln aus der Urne zu ziehen:

1 , 2   1 , 3   2 , 3

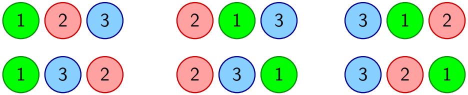
Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Diese drei Möglichkeiten entstehen dadurch, dass von den sechs Möglichkeiten beim Ziehen mit Reihenfolge (ohne Zurücklegen) jeweils immer zwei zusammenfallen.



Im Fall, dass k Kugeln gezogen werden, fallen jeweils $k!$ Kombinationen zusammen. Das ist die Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene Kugeln beliebig anzuordnen.

Fall $k = 3$: Es gibt $3! = 6$ verschiedene Anordnungen.



Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Wenn man mit Beachtung der Reihenfolge zieht, so erhält man

$$n^{\underline{k}} \text{ Möglichkeiten.}$$

Damit hat man jedoch die Möglichkeiten ohne Beachtung der Reihenfolge um den Faktor $k!$ überschätzt. Durch diesen Faktor muss noch geteilt werden.

Insgesamt ergeben sich damit

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Möglichkeiten.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Binomialkoeffizient

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Der Ausdruck

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

wird Binomialkoeffizient genannt. Er ist immer eine natürliche Zahl.

Sprechweise: "n über k", "k aus n"

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{n-k}\end{aligned}$$

Es gilt also für alle $n, k \in \mathbb{N}_0,\ k \le n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Binomialkoeffizienten als Pascalsches Dreieck:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Bemerkung: die Werte im unteren und oberen Dreieck entsprechen einander, es sind nur verschiedene Darstellungen angegeben. Einmal der Binomialkoeffizient, einmal der berechnete Wert des Binomialkoeffizienten.

Beispiele:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{(5-0)! \cdot 0!} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{120}{120 \cdot 1} = 1$$

Im letzten Fall zieht man 0 Kugeln (aus einer Urne mit 5 Kugeln). Dabei kann es nur eine mögliche enstehende Sequenz von Kugeln geben: die leere Sequenz.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

Für das Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ergeben sich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ Möglichkeiten,}$$

falls sich n (verschiedene) Kugeln in der Urne befinden und $k \leq n$ Kugeln gezogen werden.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Beispiel: Lottozahlen

Beim Lottospielen werden $k = 6$ Kugeln aus $n = 49$ gezogen, die Kugeln werden nicht zurückgelegt, die Reihenfolge wird nicht beachtet.

Daher gibt es insgesamt

$$\binom{49}{6} = 13.983.816$$

mögliche Ziehungsergebnisse.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Beispiel: Fussballpaarung

Aus einem Topf mit Kugeln, die mit $n = 18$ Fussball-Mannschaften beschriftet sind, werden zwei Kugeln gezogen, um eine Paarung zu ermitteln.

Es gibt dabei

$$\binom{18}{2} = 153$$

mögliche Ziehungsergebnisse. (Das ist genau die Anzahl der Spiele in einer Bundesliga-Hinrunde.)

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Anwendungen: allgemeine binomische Formel.

Der Ausdruck $(x+y)^n$ soll (in einem Körper) mit Hilfe des Distributivgesetzes ausmultipliziert werden. Was erhält man?

$$(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)$$

- Wenn man diesen Ausdruck ausmultipliziert, wählt man aus jedem der Faktoren entweder ein x oder ein y.
- Wenn man k-mal ein y wählt, dann wählt man $(n-k)$-mal ein x. Man erhält den Summanden $x^{n-k} \cdot y^k$.
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, k-mal ein y zu wählen?
  $\leadsto \binom{n}{k}$

Zusammenfassung: Der Summand $x^{n-k} \cdot y^k$ kommt $\binom{n}{k}$-mal vor. Der Index k kann einen der Werte von 0 bis n einnehmen.

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Formel:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Spezialfall $n = 2$:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y \\ &= x^2 + 2xy + y^2 = \binom{2}{0}\cdot x^2y^0 + \binom{2}{1}\cdot xy + \binom{2}{2}x^0y^2\end{aligned}$$

Ziehen aus Urnen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Spezialfall $n = 3$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y) \\
&= x\cdot x\cdot x + x\cdot x\cdot y + x\cdot y\cdot x + x\cdot y\cdot y \\
&\quad + y\cdot x\cdot x + y\cdot x\cdot y + y\cdot y\cdot x + y\cdot y\cdot y \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
&= \binom{3}{0}\cdot x^3y^0 + \binom{3}{1}\cdot x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}x^0y^3
\end{aligned}$$

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Wir betrachten nun noch den letzten Fall:

Ziehe k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln, mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge.

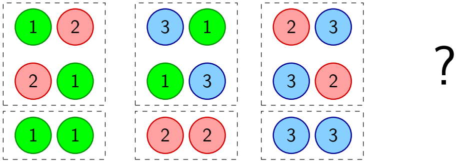
Angenommen, die Urne enthält $n = 3$ Kugeln: 1 2 3

Dann gibt es folgende sechs Möglichkeiten, $k = 2$ Kugeln aus der Urne zu ziehen:

1 , 2	1 , 3	2 , 3
1 , 1	2 , 2	3 , 3

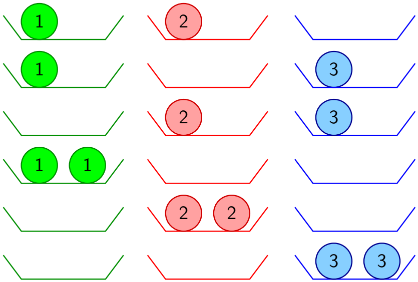
Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Hier braucht man eine gute Idee, um die Anzahl der Möglichkeiten zu zählen. Sie entstehen anscheinend nicht dadurch, dass die neun Möglichkeiten des Ziehens mit Reihenfolge (mit Zurücklegen) in gleich große Blöcke zusammengefasst werden.



Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

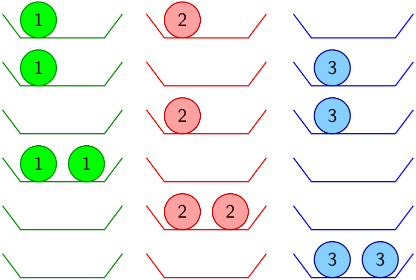
Die sechs Möglichkeiten kann man dadurch darstellen, dass man drei Fächer (eines für jede Farbe) einrichtet. Die Anzahl der Möglichkeiten ist die Anzahl der Möglichkeiten, zwei Kugeln auf diese drei Fächer zu verteilen.



Dabei bestimmt die Farbe des Fachs die Farbe der Kugeln.

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Die Farben kann man weglassen und nur noch zwischen erstem, zweitem und dritten Fach unterscheiden.
Wir benutzen eine Notation, in der die Kugeln durch kleine Kreise und die Trennwände zwischen den Fächern als Striche dargestellt werden (siehe rechte Spalte).



$\circ | \circ |$

$\circ | | \circ$

$| \circ | \circ$

$\circ \circ | |$

$| \circ \circ |$

$| | \circ \circ$

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Wir müssen also in einer vierelementigen Zeichenfolge darüber entscheiden, wo die beiden Striche und wo die beiden Kreise platziert werden.

Man kann entweder die zwei Striche wählen: $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten
oder die zwei Kreise wählen: ebenfalls $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten

Bemerkung: aufgrund der Beziehung $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ erhält man auch dann in beiden Fällen das gleiche Ergebnis, wenn die Anzahl der Striche und der Kreise unterschiedlich ist.

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Allgemeiner Fall:

Wir ziehen k Kugeln $\rightsquigarrow$ die Anzahl der Kreise ist k

Wir haben n Kugeln in der Urne $\rightsquigarrow$ die Anzahl der Farben bzw. Fächer ist n. Damit ist die Anzahl der Trennstriche $n-1$.

Die Länge der Zeichenfolge ist die Summe beider Zahlen: $n+k-1$

Insgesamt ergeben sich damit

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Möglichkeiten.

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

Für das Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ergeben sich

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} \text{ Möglichkeiten,}$$

falls sich n (verschiedene) Kugeln in der Urne befinden und k Kugeln gezogen werden.

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Beispiel: Würfeln

Falls mit drei identischen Würfeln gewürfelt wird, so entspricht das dem Ziehen von $k = 3$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 6$ Kugeln, mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reichenfolge.

Insgesamt haben wir

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

verschiedene Würfelergebnisse.

Es folgt die Aufzählung aller 56 Möglichkeiten ...

Ziehen aus Urnen (mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

1,1,1	1,1,2	1,1,3	1,1,4	1,1,5	1,1,6
1,2,2	1,2,3	1,2,4	1,2,5	1,2,6	
1,3,3	1,3,4	1,3,5	1,3,6		
1,4,4	1,4,5	1,4,6			
1,5,5	1,5,6				
1,6,6					
2,2,2	2,2,3	2,2,4	2,2,5	2,2,6	
2,3,3	2,3,4	2,3,5	2,3,6		
2,4,4	2,4,5	2,4,6			
2,5,5	2,5,6				
2,6,6					
3,3,3	3,3,4	3,3,5	3,3,6		
3,4,4	3,4,5	3,4,6			
3,5,5	3,5,6				
3,6,6					
4,4,4	4,4,5	4,4,6			
4,5,5	4,5,6				
4,6,6					
5,5,5	5,5,6				
5,6,6					
6,6,6					

Ziehen aus Urnen

Zusammenfassung der vier Fälle:

Ziehen	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Reihenfolge	n^k	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Dabei werden k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln gezogen.

Wahrscheinlichkeit

Um das Kapitel “Kombinatorik” abzuschließen, machen wir noch einige Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit von Ereignissen.

Motivation: Wahrscheinlichkeit, im Lotto zu gewinnen

Bei einer Ziehung der Lottozahlen gibt es insgesamt $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten (sogenannte Elementarereignisse).

Diese Elementarereignisse sind alle gleich wahrscheinlich. (Warum das so ist, überlegen wir uns im Folgenden.)

Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die eigene Kombination gezogen wird:

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816} = 0{,}000000072\dots$$

Dabei ist 1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das betrachtete Ereignis auf jeden Fall eintritt (entspricht 100%).

Wahrscheinlichkeit

Elementarereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten werden in einem Wahrscheinlichkeitsraum zusammengefasst.

Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus

- einer Ergebnismenge Ω, bestehend aus den Elementarereignissen, und
- einer Funktion $P\colon \Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Elementarereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

Dabei muss gelten:

- Für jedes $x \in \Omega$ gilt $0 \leq P(x) \leq 1$. (Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis liegt zwischen 0 und 1.)
- $\sum\limits_{x \in \Omega} P(x) = 1$. (Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1.)

Wahrscheinlichkeit

Bemerkungen:

- Die Formel $\sum_{x \in \Omega} P(x)$ bedeutet: summiere die Werte $P(x)$ für alle $x \in \Omega$ auf. Falls $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so kann man dies auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{x \in \Omega} P(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = P(x_1) + \cdots + P(x_n)$$

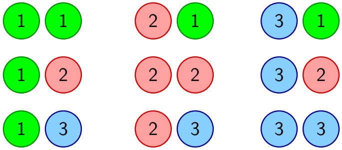
- Die Elementarereignisse müssen alle Möglichkeiten abdecken und dürfen sich nicht überlappen. Es tritt also immer genau ein Elementarereignis ein.
- Im Folgenden ist Ω eine endliche Menge. Es macht jedoch auch Sinn, unendliche Ergebnismengen zu betrachten.

Wahrscheinlichkeit

Beim Ziehen aus Urnen besteht die Ergebnismenge aus allen möglichen Kombinationen, die beim Ziehen entstehen können.

Beispiel:

Beim Ziehen von $k = 2$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln (mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge) erhält man folgende neun Elementarereignisse:



Wahrscheinlichkeit

Falls alle Elementarereignisse in Ω gleich wahrscheinlich sind, so gilt

$$P(x) = \frac{1}{|\Omega|} \qquad \text{für jedes } x \in \Omega$$

Beim Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge ist jedes Ereignis gleich wahrscheinlich, unter der Voraussetzung, dass bei einem Zug keine der vorhandenen Kugeln bevorzugt wird. Dann hat jede Verzweigung im Entscheidungsbaum die gleiche Wahrscheinlichkeit. (Das gilt mit und ohne Zurücklegen.)

▸ Entscheidungsbaum (Ziehen mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

▸ Entscheidungsbaum (Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

Wahrscheinlichkeit

Also gilt:

Beim Ziehen von k aus n Kugeln (mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge) hat jede Kombination die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n^k}$$

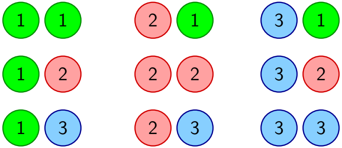
Beim Ziehen von k aus n Kugeln (ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge) hat jede Kombination die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n^{\underline{k}}}$$

Wahrscheinlichkeit

Beispiel:

Beim Ziehen von $k = 2$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln (mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge) hat jedes der unten aufgeführten Elementarereignisse x die Wahrscheinlichkeit $P(x) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.



Wahrscheinlichkeit

Noch ein Beispiel:

Wir betrachten einen gezinkten Würfel, bei dem die Sechs wahrscheinlicher ist als die anderen Zahlen.

Die Ergebnismenge ist bei einem sechsseitigen Würfel wie folgt: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Wir betrachten folgende Zurdnung von Wahrscheinlichkeiten: $P(6) = \frac{1}{2}$, $P(x) = \frac{1}{10}$ falls $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Test: Ergibt die Summe der Wahrscheinlichkeiten Eins?

$$\sum_{x \in \Omega} P(x) = P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = 5 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = 1$$

Wahrscheinlichkeit

Frage: was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder eine 1 oder eine 6 gewürfelt wird?

Antwort: man muss nur die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse aufaddieren.
$\leadsto P(1) + P(6) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Wahrscheinlichkeit

Das Würfeln einer 1 oder 6 bezeichnet man als (zusammengesetztes) Ereignis, im Unterschied zu Elementarereignissen.

Ereignis, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum, bestehend aus Ω und $P\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heißt Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E wird folgendermaßen berechnet:

$$P(E) = \sum_{x \in E} P(x)$$

Beispiel mit dem gezinkten Würfel: Ereignis $E = \{1, 6\}$ mit

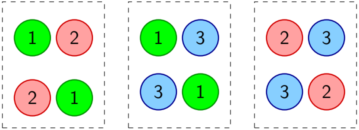
$$P(E) = P(\{1, 6\}) = P(1) + P(6) = \frac{3}{5}$$

Wahrscheinlichkeit

Für Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge kann man den Wahrscheinlichkeitsraum des Ziehens ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge betrachten.

Beispiel:

Beim Ziehen von $k = 2$ aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln (ohne Zurücklegen) gibt es folgende sechs Elementarereignisse, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.



Diese kann man zu drei Ereignissen zusammenfassen, die jeweils die gleichen Kombinationen (ohne Beachtung der Reihenfolge) enthalten. Jedes dieser drei Ereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Wahrscheinlichkeit

Im allgemeinen Fall fasst man $k!$ Möglichkeiten zu einem Ereignis zusammen.

Beim Ziehen von k aus n Kugeln (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge) hat jede Kombination die Wahrscheinlichkeit

$$k! \cdot \frac{1}{n^{\underline{k}}} = \frac{k!}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} = \frac{1}{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

Also hat auch in diesem Fall jede Kombination die gleiche Wahrscheinlichkeit.

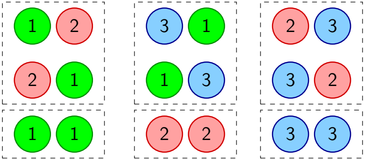
Bemerkung: Aufgrund dieser Beziehung war die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Lottogewinn korrekt.

Wahrscheinlichkeit

Wir betrachten nun noch das Ziehen mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge basierend auf dem Wahrscheinlichkeitsraum des Ziehens mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge.

Beispiel:

Beim Ziehen von $k = 2$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln (mit Zurücklegen) gibt es folgende neun Elementarereignisse, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$.



Wahrscheinlichkeit

Diese kann man zu sechs Ereignissen zusammenfassen, die aber *nicht* alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Es ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

1, 2 : $\frac{2}{9}$	1, 3 : $\frac{2}{9}$	2, 3 : $\frac{2}{9}$
1, 1 : $\frac{1}{9}$	2, 2 : $\frac{1}{9}$	3, 3 : $\frac{1}{9}$

Mit Summe $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 1$

Vorsicht! Beim Ziehen von k aus n Kugeln (mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge) hat nicht jede Kombination dieselbe Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeit

Weiteres Beispiel:

Beim Würfeln mit zwei (fairen und ununterscheidbaren) Würfeln haben nicht alle Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit:

- Die Kombination $1,2$ kann aus den Folgen $1\,2$ und $2\,1$ entstehen. Jede der beiden Folgen hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$.
  Also hat das Würfelergebnis $1,2$ die Wahrscheinlichkeit $2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$.
- Der Sechserpasch $6,6$ kann nur aus der Folge $6\,6$ entstehen.
  Er hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse:

$$P(\Omega \backslash A) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Insbesondere folgt daraus $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$, d.h., falls A und B disjunkte Ereignisse sind.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Unabhängigkeit von Ereignissen (Definition)

Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen unabhängig, falls gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Beispiel Würfel:

- Die Ereignisse $A = \{1, 3, 5\}$ (Ergebnis ist ungerade) und $B = \{2, 4, 6\}$ (Ergebnis ist gerade) sind nicht unabhängig. Es gilt:

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

- Die Ereignisse $\{1, 3, 5\}$ (Ergebnis ist ungerade) und $\{1, 2, 3, 4\}$ (Ergebnis ist kleiner gleich vier) sind unabhängig. Es gilt:

$$P(A \cap B) = P(\{1, 3\}) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = P(A) \cdot P(B)$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Definition)

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist definiert durch

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

falls $P(B) \neq 0$.

Die Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ ist intuitiv die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass man bereits weiß, dass das Ereignis B eintritt.

Sprechweise: Wahrscheinlichkeit von A, vorausgesetzt B.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Beispiel Würfel: $A = \{1,3,5\}$ (Ergebnis ist ungerade) und $B = \{1,2,3\}$ (Ergebnis ist kleiner gleich drei).

Dann gilt:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{1,3\})}{P(\{1,2,3\})} = \frac{2}{3}$$

Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit

Zwei (nicht-leere) Ereignisse A, B sind unabhängig genau dann, wenn:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(B \mid A) = P(B)$$

D.h., die Kenntnis, dass das Ereignis B eintreten wird, ändert die Wahrscheinlichkeit von A nicht.