

Vorlesung “Mathematische Strukturen”

Sommersemester 2015

Prof. Barbara König
Übungsleitung: Dennis Nolte

Zusammenfassung

Themen der Vorlesung

- Grundlagen: Mengenlehre, Relationen und Zahlentheorie
- Analysis, Ableitung, Kurvendiskussion
- Algebraische Strukturen: Monoide/Gruppen/Körper, Vektorräume und Matrizen, Gaußsches Eliminationsverfahren
- Kombinatorik: Ziehen aus Urnen, Wahrscheinlichkeit

Stichwortsammlung: Grundlagen

Mengenlehre:

- Menge M
- Element einer Menge $a \in M$
- Teilmenge $M' \subseteq M$
- Schnitt/Vereinigung \cup, \cap
- Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$
- Kreuzprodukt $M_1 \times M_2$
- Relationen: Partielle Ordnung, Äquivalenzrelation (Symmetrie, Antisymmetrie, Reflexivität, Transitivität)
- Funktionen: Surjektivität, Injektivität, Bijektivität, Funktionsverkettung, Bild/Urbild einer Menge, Definitionsbereich und Wertebereich
- Mengen von Zahlen: $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$

Stichwortsammlung: Analysis

Grenzwert, Stetigkeit:

- Steigung von Geraden und Tangenten
- Berechnung der Steigung mit Hilfe eines Grenzwertes
- Grenzwert
- Häufungspunkt
- Stetigkeit von Funktionen

Stichwortsammlung: Analysis

Ableitung, Kurvendiskussion:

- Definition der Ableitung (basierend auf Grenzwerten)
- Bestimmung der Ableitung bei konkreten Funktionen
- Ableitungen bekannter Funktionen
- Ableitungsregeln (Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel)
- n -te Ableitungen
- Kurvendiskussion (Minima, Maxima, Sattelpunkte, Wendepunkte)

Stichwortsammlung: Grundlagen

Zahlentheorie:

- Division mit Rest
- Modulo-Rechnung
- Teilbarkeit
- Primzahlen
- Primfaktorzerlegung
- Teilerfremdheit
- Größter gemeinsamer Teiler ggT & kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV
- Euklidischer Algorithmus
- Diophantische Gleichungen
- Die Eulersche φ -Funktion
- Satz von Euler-Fermat

Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

Monoide/Gruppen/Körper:

- Zweistellige Operatoren
- Neutrale Elemente $0, 1$
- Inverse $-a, a^{-1}$
- Assoziativität
- Kommutativität
- Distributivität
- Der Körper $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, falls n eine Primzahl ist

Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

RSA-Algorithmus:

- Schlüsselerzeugung
- Privater Schlüssel
- Öffentlicher Schlüssel
- Verschlüsselung einer Nachricht
- Entschlüsselung einer Nachricht

Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

Vektorräume und Matrizen (Lineare Algebra):

- Vektor \vec{v}
- Vektorraum
- Skalar
- Anwendungsgebiet “Geometrie” (Punkte auf der Ebene und im Raum)
- Vektor-Addition $\vec{v} + \vec{u}$
- Vektorraum als Gruppe
- Multiplikation mit einem Skalar $k \cdot \vec{v}$
- Matrizen/Lineare Abbildungen A, ψ_A

Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

Matrizen:

- Matrizen
- Zeilendimension/Spaltendimension
- Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor $A \cdot \vec{v}$
- Addition von zwei Matrizen $A + B$
- Die additive Gruppe der Matrizen
- Matrixmultiplikation $A \cdot B$
- Einheitsmatrix E_n
- Inverse Matrix A^{-1}

Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

Basen, Gaußsches Eliminationsverfahren und inverse Matrizen:

- Erzeugendensystem
- Lineare Unabhängigkeit
- Basis
- Lineare Gleichungssysteme
- Gaußsches Eliminationsverfahren
- Anzahl der möglichen Lösungen
- Inverse Matrix bestimmen

Stichwortsammlung: Kombinatorik

Ziehen aus Urnen (k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln):

- Mit Reihenfolge, mit Zurücklegen (n^k Möglichkeiten)
- Mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen ($n^{\underline{k}}$ Möglichkeiten)
- Ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen ($\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten)
- Ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen ($\binom{n}{k}$ Möglichkeiten)

Stichwortsammlung: Kombinatorik

Ziehen aus Urnen mit Anwendungen:

- Anzahl der Funktionen zwischen zwei Mengen
- Anzahl der injektiven Funktionen zwischen zwei Mengen
- Fakultätsfunktion
- Binomialkoeffizienten
- Allgemeine binomische Formel

Stichwortsammlung: Kombinatorik

Wahrscheinlichkeiten:

- Elementarereignisse/Ergebnismenge Ω
- Wahrscheinlichkeitsraum
- Wahrscheinlichkeiten in der Urnen-Metapher
- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
- Unabhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeiten