

# Vorlesung “Mathematische Strukturen”

Sommersemester 2015

Prof. Barbara König  
Übungsleitung: Dennis Nolte

# Zusammenfassung

## Themen der Vorlesung

- Grundlagen: Mengenlehre, Relationen und Zahlentheorie
- Analysis, Ableitung, Kurvendiskussion
- Algebraische Strukturen: Monoide/Gruppen/Körper, Vektorräume und Matrizen, Gaußsches Eliminationsverfahren
- Kombinatorik: Ziehen aus Urnen, Wahrscheinlichkeit

# Stichwortsammlung: Grundlagen

## Mengenlehre:

- Menge  $M$
- Element einer Menge  $a \in M$
- Teilmenge  $M' \subseteq M$
- Schnitt/Vereinigung  $\cup, \cap$
- Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$
- Kreuzprodukt  $M_1 \times M_2$
- Relationen: Partielle Ordnung, Äquivalenzrelation (Symmetrie, Antisymmetrie, Reflexivität, Transitivität)
- Funktionen: Surjektivität, Injektivität, Bijektivität, Funktionsverkettung, Bild/Urbild einer Menge, Definitionsbereich und Wertebereich
- Mengen von Zahlen:  $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$

# Stichwortsammlung: Analysis

## Grenzwert, Stetigkeit:

- Steigung von Geraden und Tangenten
- Berechnung der Steigung mit Hilfe eines Grenzwertes
- Grenzwert
- Häufungspunkt
- Stetigkeit von Funktionen

# Stichwortsammlung: Analysis

## Ableitung, Kurvendiskussion:

- Definition der Ableitung (basierend auf Grenzwerten)
- Bestimmung der Ableitung bei konkreten Funktionen
- Ableitungen bekannter Funktionen
- Ableitungsregeln (Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel)
- $n$ -te Ableitungen
- Kurvendiskussion (Minima, Maxima, Sattelpunkte, Wendepunkte)

# Stichwortsammlung: Grundlagen

## Zahlentheorie:

- Division mit Rest
- Modulo-Rechnung
- Teilbarkeit
- Primzahlen
- Primfaktorzerlegung
- Teilerfremdheit
- Größter gemeinsamer Teiler  $ggT$  & kleinstes gemeinsames Vielfaches  $kgV$
- Euklidischer Algorithmus
- Diophantische Gleichungen
- Die Eulersche  $\varphi$ -Funktion
- Satz von Euler-Fermat

# Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

## Monoide/Gruppen/Körper:

- Zweistellige Operatoren
- Neutrale Elemente  $0, 1$
- Inverse  $-a, a^{-1}$
- Assoziativität
- Kommutativität
- Distributivität
- Der Körper  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ , falls  $n$  eine Primzahl ist

# Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

## RSA-Algorithmus:

- Schlüsselerzeugung
- Privater Schlüssel
- Öffentlicher Schlüssel
- Verschlüsselung einer Nachricht
- Entschlüsselung einer Nachricht



# Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

## Vektorräume und Matrizen (Lineare Algebra):

- Vektor  $\vec{v}$
- Vektorraum
- Skalar
- Anwendungsgebiet “Geometrie” (Punkte auf der Ebene und im Raum)
- Vektor-Addition  $\vec{v} + \vec{u}$
- Vektorraum als Gruppe
- Multiplikation mit einem Skalar  $k \cdot \vec{v}$
- Matrizen/Lineare Abbildungen  $A, \psi_A$

# Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

## Matrizen:

- Matrizen
- Zeilendimension/Spaltendimension
- Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor  $A \cdot \vec{v}$
- Addition von zwei Matrizen  $A + B$
- Die additive Gruppe der Matrizen
- Matrixmultiplikation  $A \cdot B$
- Einheitsmatrix  $E_n$
- Inverse Matrix  $A^{-1}$

# Stichwortsammlung: Algebraische Strukturen

## Basen, Gaußsches Eliminationsverfahren und inverse Matrizen:

- Erzeugendensystem
- Lineare Unabhängigkeit
- Basis
- Lineare Gleichungssysteme
- Gaußsches Eliminationsverfahren
- Anzahl der möglichen Lösungen
- Inverse Matrix bestimmen

# Stichwortsammlung: Kombinatorik

Ziehen aus Urnen ( $k$  Kugeln aus einer Urne mit  $n$  Kugeln):

- Mit Reihenfolge, mit Zurücklegen ( $n^k$  Möglichkeiten)
- Mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen ( $n^{\underline{k}}$  Möglichkeiten)
- Ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen ( $\binom{n+k-1}{k}$  Möglichkeiten)
- Ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen ( $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten)

# Stichwortsammlung: Kombinatorik

## Ziehen aus Urnen mit Anwendungen:

- Anzahl der Funktionen zwischen zwei Mengen
- Anzahl der injektiven Funktionen zwischen zwei Mengen
- Fakultätsfunktion
- Binomialkoeffizienten
- Allgemeine binomische Formel

# Stichwortsammlung: Kombinatorik

## Wahrscheinlichkeiten:

- Elementarereignisse/Ergebnismenge  $\Omega$
- Wahrscheinlichkeitsraum
- Wahrscheinlichkeiten in der Urnen-Metapher
- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
- Unabhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeiten