Masterarbeit
Matchings und Totale Dominanz

Sebastian Küpper

19. Dezember 2011

Betreuer: Prof. Dr. Xinlong Zhou
Tag der Anmeldung: 23. August 2011
Tag der Abgabe: 19. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden die Begriffe der Dominanz und der totalen Dominanz in Graphen eingeführt und hierdurch definierte Graphklassen untersucht. Ein Graph wird von einer Teilmenge seiner Knotenmenge S dominiert, wenn S zusammen mit den Nachbarn von S ganz V ist. Er wird von S total dominiert, wenn die Nachbarn von S ganz V sind.
Insbesondere werden kritische Graphen untersucht, deren totale Dominanzzahl sich beim Hinzufügen einer Kante oder beim Löschen eines Knotens ändert. Im Mittelpunkt der Betrachtung stehen die 3-kritischen Graphen, das heißt Graphen, deren Dominanzzahl 3 ist und deren totale Dominanzzahl sich beim Hinzufügen einer Kante (dann handelt es sich um Kanten-kritische Graphen) oder dem Löschen eines Knotens (dann handelt es sich um Knoten-kritische Graphen) auf zwei verringert.
Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen kritische Graphen ein perfektes Matching besitzen oder jedenfalls Faktor-kritisch sind. Die Hauptergebnisse in Bezug auf diese Fragen wurden im Jahr 2010 von Michael A. Henning und Anders Yeo [4] vorgestellt. Im Zuge dieser Arbeit wurde die Untersuchung Kanten-kritischer Graphen zudem auf die Existenz von perfekten $[1,2]$-Faktoren ausgedehnt. Die Untersuchung Kanten-kritischer wie auch Knoten-kritischer Graphen stützt sich insbesondere auf die bekannten Faktorsätzen von Tutte [8].
Die Fage, ob ein Graph ein perfektes Matching besitzt, ist nicht uninteressant, denn algorithmisch ist das Problem, die Größe des größten Matchings zu bestimmen, im Allgemeinen NP-schwer , vgl. [2], und somit kann es hilfreich sein, wenn man für eine möglichst große Klasse von Graphen bereits auf Grund ihrer Zugehörigkeit zur Klasse und einfachen weiteren Kriterien entscheiden kann, ob der Graph ein perfektes Matching oder einen perfekten $[1,2]$-Faktor besitzt. Eine Klasse von Graphen, die leicht algorithmisch beherrschbar ist, wurde bereits in [9] besprochen, für bipartite Graphen reicht demnach die Suche nach M-zunehmenden Wegen um die Frage nach der Existenz eines perfekten Matchings zu beantworten. Die in dieser Arbeit bewiesenen Kriterien sind zwar noch etwas leichter zu überprüfen, dafür ist die Zugehörigkeit zur Klasse der 3-kritischen Graphen bezüglich totaler Dominanz schwer festzustellen [2]. Weiß man aber aus irgendeinem Grund bereits, dass ein Graph 3-kritisch ist, können die Kriterien angewandt werden, um die Existenz eines perfekten Matchings oder perfekten $[1,2]$-Faktors nachzuweisen.
In einem einführenden Kapitel werden alle für das Verständnis der Arbeit wichtigen Definitionen gegeben. In Anbetracht dessen, dass verschiedene Graph-Begriffe üblich sind und selbst Begriffe wie „Weg“ nicht eindeutig sind, werden auch diese grundlegenden Begriffe eingeführt. Im Unterkapitel Matchings in Graphen wird die Definition eines Matchings wiederholt und der Matching-Satz von Tutte bewiesen, bevor im letzten Unterkapitel des ersten

Kapitels die wichtigen Begriffe rund um die Dominanz definiert werden.
Im darauffolgenden Kapitel werden Kanten-kritische Graphen untersucht und eines der Hauptergebnisse bewiesen, dass 2-zusammenhängende 3-kritische Graphen, sofern sie keinen End-Knoten haben, immer ein perfektes Matching besitzen oder Faktor-kritisch sind.
Im Kapitel „Perfekte $[1, 2]$-Faktoren in Totale Dominanz-Kanten-kritischen Graphen“ untersuchen wir, inwiefern die im vorherigen Kapitel gemachten Anforderungen an den Graphen gelockert werden können und inwiefern sich die Güte des Ergebnisses dadurch verschlechtert.
Etwas weniger schön sind die Ergebnisse, wenn wir Knoten-kritische Graphen im letzten Kapitel untersuchen. Unter gewissen Voraussetzungen gibt es immer noch perfekte Matchings in Graphen mit gerader Knotenanzahl und unter passenden Bedingungen sind Graphen mit ungerader Knotenanzahl faktor-kritisch, an Hand von Gegenbeispielen wird aber auch klar, dass man diese härteren Bedingungen nicht weiter lockern kann.

2 Grundlagen der Graphentheorie

2.1 Graphen, Zusammenhang, Wege

In diesem Kapitel werden wichtige Begriffe der Graphentheorie wiederholt, die für diese Arbeit relevant sind. Insbesondere die Begriffe Graph und Matching werden wiederholt, da sie zentral für die weitere Arbeit sind. Dieses Kapitel folgt, wenn nicht anders angegeben den Darstellungen aus [8], die Definitionen von Graphen, Zusamenhang und Wegen entsprechen fast wörtlich den Darstellungen in [5].

Definition 2.1 ***Graph***
Seien V,E Mengen mit $V \cap E = \emptyset$ und $h : E \rightarrow \{M : M \subset V \wedge 0 < |M| \leq 2$ eine Abbildung. Dann ist (V,E,h) ein (ungerichteter) Graph. Ist h injektiv, so identifizieren wir E auch mit h(E) und schreiben für $e \in E$: $e = h(e) = \{u, v\}$ für ein u und ein v aus V. V nennen wir die Knotenmenge (oder auch Eckenmenge), E die Kantenmenge und h die Kantenabbildung. Mit $n_G = |V|$ bezeichnen wir die Zahl der Knoten und mit $m_G = |E|$ die Zahl der Kanten eines Graphen G. Wenn der Graph aus dem Kontext klar ist, schreiben wir auch kurz n für n_G und m für m_G. Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden werden, nennen wir adjazent, ein Knoten, der Endpunkt einer Kante ist, inzidiert mit dieser Kante. Schließlich nennen wir auch zwei Kanten, die einen Knoten als gemeinsamen Endpunkt haben, adjazent, anderenfalls nennen wir sie unabhängig.

Bemerkung 2.2 ***Endlichkeit***
In dieser Arbeit betrachten wir nur endliche Graphen, das bedeutet, $|E| < \infty$ und $|V| < \infty$. Des Weiteren betrachten wir in dieser Arbeit nur Graphen mit injektiver Kantenabbildung und können daher die einfachere Notation der Kanten als Mengen der verbundenen Knoten verwenden. Daher identifizieren wir wie in der Definition die Kanten mit den Knoten, die sie verbinden und schreiben für einen Graphen G=(V,E,h) auch kurz G=(V,E). Wir betrachten im Verlauf dieser Arbeit ausschließlich Graphen ohne Loops, jede Kante ist also mit zwei verschiedenen Knoten verbunden.

Wir verwenden für Graphen eine grafische Repräsentation, die mit dem folgenden Beispiel eingeführt wird.

Definition 2.3 ***Kantenfolge, Weg und Kreis***
Für einen Graph G=(V,E) bezeichnen wir eine Folge von Kanten

$$\{\{u_i, u_{i+i}\}\}_{i\in\{1,...,p\}}$$

als Kantenfolge. Wir schreiben für eine Kantenfolge auch $(u_1, u_2, ..., u_p)$. Ein Weg ist eine Kantenfolge f für die gilt, dass für alle $u_i, u_j \in f$ mit $i \neq j$ gilt: $u_i \neq u_j$. Eine Kantenfolge $f = (u_1, u_2, ..., u_p)$ heißt Kreis, wenn $u_1 = u_p$ und $(u_1, u_2, ..., u_{p-1})$ ein Weg ist.

Beispiel 2.4 ***Beispielgraph***
Abbildung 1 stellt den Graphen

$$G = (\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}, \{C, D\}\})$$

dar. Um die Kanten leicht bezeichnen zu können, haben sie im Beispiel Label

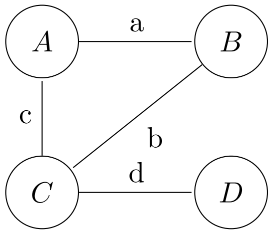

Abbildung 1: Beispielgraph

erhalten. So ist die Kante $\{A, B\}$ mit dem Label a, die Kante $\{B, C\}$ mit dem Label b, die Kante $\{C, A\}$ mit dem Label c und die Kante $\{C, D\}$ mit dem Label d versehen. A und B sind adjazent, $\{A, B\}$ inzidiert mit A und B und $\{A, B\}$ und $\{B, C\}$ sind adjazent, wohingegen $\{A, B\}$ und $\{C, D\}$ unabhängig voneinander sind.

Definition 2.5 ***Zusammenhangskomponente***
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, V' eine Teilmenge der Knotenmenge und $V^* = V \setminus V'$. Dann ist mit $E' = \{\{u, v\} \in E \mid u \in V' \wedge v \in V'\}$ $G' = (V', E')$ eine (Zusammenhangs-) Komponente des Graphen G, wenn gilt, dass:
$\forall v \in V^*(\neg\exists u \in V'(\{u, v\} \in E))$ *und*
für alle u und v in V' existiert ein Weg von u nach v in G'
Ein Graph mit nur einer Zusammenhangskomponente heißt zusammenhängend.
Eine Zusammenhangskomponente, die nur einen Knoten enthält, nennen wir isolierten Knoten.
Schließlich nennen wir einen Graphen G 2-zusammenhängend, wenn $G - v$ für jeden Knoten $v \in V$ zusammenhängend ist. Ist ein Graph zusammenhängend, aber nicht 2-zusammenhängend, so gibt es einen Knoten $v \in V$, so dass $G - v$ nicht zusammenhängend ist. Diesen Knoten v nennen wir einen Schnittknoten.

Beispiel 2.6 ***Graph mit drei Zusammenhangskomponenten***
Der Graph im folgenden Bild hat drei Zusammenhangskomponenten, eine, die die Knoten A, B, C und D enthält, eine die die Knoten E und F enthält und eine die den Knoten G enthält. G ist ein isolierter Knoten.

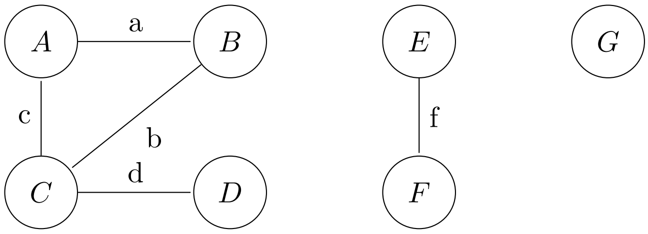

Abbildung 2: Graph mit drei Komponenten

Definition 2.7 ***Digraph***
Seien V, E Mengen mit $V \cap E = \emptyset$ und $h : E \to V \times V$ eine Abbildung. Dann ist (V, E, h) ein Digraph oder gerichteter Graph. Ist h injektiv, so identifizieren wir E auch mit $h(E)$ und schreiben für $e \in E$: $e = h(e) = (u, v)$ für ein u und ein v aus V. V nennen wir die Knotenmenge (oder auch Eckenmenge), E die Kantenmenge (oder auch Bogenmenge) und h die Kantenabbildung. Mit $n_G = |V|$ bezeichnen wir die Zahl der Knoten und mit $m_G = |E|$ die Zahl der Kanten eines Digraphen G. Wenn der Graph aus dem Kontext klar ist, schreiben wir auch kurz n für n_G und m für m_G. Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden werden, nennen wir adjazent, ein Knoten, der Endpunkt einer Kante ist, inzidiert mit dieser Kante. Schließlich nennen wir auch zwei Kanten, die einen Knoten als gemeinsamen Endpunkt haben, adjazent, anderenfalls nennen wir sie unabhängig. Die Kanten eines Digraphen sind gerichtet, das heißt, dass sie nur in die Richtung vom ersten Knoten zum zweiten Knoten durchlaufen werden können, wenn man einen Weg im Graphen sucht. Wege, Kantenfolgen und Kreise sind genauso definiert wie für Graphen, nur dass die Kanten zusätzlich in die gleiche Richtung zeigen müssen.

Definition 2.8 *Wichtige Größen in Graphen*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

1. *Für einen Knoten $v \in V$ bezeichnet $d(v)$ den Grad dieses Knotens, das heißt die Anzahl der Kanten, die mit v inzidieren, formal: $|\{\{u, w\} \in E | u = v\}|$. $\Delta(G)$ bezeichnet das Maximum über alle Knotengrade und $\delta(G)$ das Minimum*

2. *Einen Knoten, der mit genau einer Kante inzidiert, nennen wir End-Knoten und einen Knoten, der adjazent zu einem End-Knoten ist nennen wir unterstützenden Knoten.*

3. *Der Abstand zwischen zwei Knoten u und v von G ist die Länge des kürzesten Weges von u nach v, in Zeichen $d(u, v)$. Die maximale Distanz eines Paares von Knoten in G nennen wir den Durchmesser von G, in Zeichen $dm(G)$. Betrachten wir mehrere Graphen, so machen wir mit einem tiefgestellten Index deutlich, zu welchem Graphen die*

jeweilige Größe gehört. Gibt es beispielsweise zusätzlich einen Graphen H, so schreiben wir also $d_H(u, v)$ für den Abstand zwischen u und v in H.

4. *Eine Teilmenge $S \subset V$ der Knotenmenge nennen wir unabhängige (Knoten-) Menge, wenn es in G keine Kante zwischen zwei Knoten aus S gibt, wenn also für jede Kante $e \in E$ (interpretiert als die Menge die die verbundenen Knoten enthält!) gilt $|e \cap S| < |e|$.*

5. *Einen Knoten v eines Graphen G, für den gilt, dass die Zahl der Komponenten des Graphen G ohne v, $G-v$, größer ist als die Zahl der Komponenten von G nennen wir Schnitt-Knoten. Einen zusammenhängenden Graphen ohne Schnitt-Knoten nennen wir 2-zusammenhängend.*

Definition 2.9 *Teilgraph*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $S \subset V$ eine Teilmenge der Knotenmenge des Graphen. Der durch S induzierte Teilgraph ist der Graph $G_S = (S, E')$ mit $E' = \{\{u, v\} \in E : u \in S \wedge v \in S\}$. Ein Teilgraph, in dem jeder Knoten aus S zu jedem anderen Knoten aus S adjazent ist, nennen wir Clique. Weiterhin bezeichnen wir mit $G - S$ den Teilgraphen zu $V \setminus S$ und wenn S nur einen Knoten v enthält, so schreiben wir auch $G - v$. Sind $u \in V$ und $v \in V$, aber $\{u, v\} \notin E$, so schreiben wir für den Graphen $G' = (V, E \cup \{\{u, v\}\})$ auch $G + \{u, v\}$.

Definition 2.10 *Bipartiter Graph*
Wir nennen einen Graphen $G = (V, E)$ einen bipartiten Graphen, wenn es zwei nicht-leere Teilmengen $A \subset V$, $B \subset V$ der Knotenmenge gibt, für die gilt $A \cap B = \emptyset$, $V = A \cup B$ und es gibt keine Kante $\{u, v\} \in E$ so dass $u \in A$ und $v \in A$ oder $u \in B$ und $v \in B$ gilt. Wir nennen einen bipartiten Graphen vollständig, wenn jeder Knoten aus A adjazent zu jedem Knoten aus B ist. Wir schreiben dann auch $K_{|A|,|B|}$ für einen solchen Graphen.

2.2 Matchings in Graphen

Definition 2.11
1. *Ein Matching eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $M \subset E$ der Kantenmenge, so dass keine zwei Kanten aus M adjazent sind.*

2. *Ein maximales Matching ist ein Matching, das unter allen Matchings von G die maximale Anzahl an Kanten enthält.*

3. *Ein perfektes Matching ist ein Matching M, in dem jeder Knoten aus V Endpunkt einer Kante aus M ist.*

4. *Ist M ein Matching, so nennen wir einen Weg w in G M-alternierend, falls jede zweite Kante in w auch in M liegt.*

5. *Ein Graph G heißt faktor-kritisch, wenn für jeden Knoten $v \in V$ der Graph $G - v$ ein perfektes Matching besitzt.*

6. *Mit $q(G)$ bezeichnen wir die Anzahl an Komponenten in G, die eine ungerade Anzahl an Knoten enthalten.*

7. *Es sei weiter $G = (V, E)$ ein Graph. Die offene Nachbarschaft eines Knotens $v \in V$ ist die Menge aller Knoten, die zu v adjazent sind. Wir schreiben $N(v) = \{u \in V | \{u, v\} \in E\}$.*

Wir wollen in diesem Unterkapitel zwei bekannte Kriterien für die Existenz eines perfekten Matchings herleiten. Das Beweis des ersten Ergebnisses, des Matchingsatzes von Tutte, bedarf zuvor noch eines Lemmas, das am Ende des Beweises Verwendung finden wird. Der Satz und der Beweis entstammen [8]. Obwohl die Aussage eigentlich auch deutlich allgemeiner zu fassen ist, benötigen für für den Matching-Satz von Tutte nur diese Spezialform, so dass wir in diesem Lemma auch nur diese beweisen.

Lemma 2.12 *Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit den Partitionen A und B, $|A| = |B|$. Falls für alle $S \subset A$ die Ungleichung $|S| \leq |N(S)|$ gilt, gibt es in G ein perfektes Matching.*

Beweis: Wir nehmen an, es gilt $|S| \leq |N(S)|$ für alle $S \subset A$. Sei nun M ein maximales Matching von G. Wir zeigen die Aussage durch einen Widerspruchsbeweis, wir nehmen also an, dass M nicht perfekt ist, es gibt also zumindest einen Knoten $a \in V$, so dass a mit keiner Kante aus M inzidiert, o.B.d.A. sei $a \in A$. Weiterhin bezeichnen wir mit $U(a)$ die Menge aller Knoten von G, die man durch einen M-alternierenden Weg mit a verbinden kann. Weiterhin sei $\overline{U(a)} = U(a) \cup \{a\}$. Da M maximal ist, muss gelten $U(a) \subset V(M)$, wobei $V(M)$ die Knoten bezeichnet, die mit einer Kante in M inzidieren. Denn anderenfalls gäbe es einen Knoten $b \notin V(M) \cup \{a\}$, der über einen M-alternierenden Weg $w = (e_1, e_2, ..., e_r)$ mit a verbunden werden kann. Wir nennen einen solchen Weg M-zunehmend und stellen fest, dass M in diesem Fall nicht maximal wäre. Würden wir nämlich aus M alle Kanten mit geradem Index in w entfernen und alle Kanten mit ungeradem Index in w hinzufügen, so erhielten wir ein Matching, das eine Kante mehr enthält als M.
Es gilt also tatsächlich $U(a) \subset V(M)$. Wir setzen nun $S = \overline{U(a)} \cap A$ und $I = \overline{U(a)} \cap B$. Es gilt nun, dass jeder Knoten aus $S \setminus \{a\}$ mit genau einem Knoten aus I durch eine Kante von M verbunden ist und umgekehrt. Es gilt also $|I| = |S| - 1$ und $I \subset N(S)$. Weiterhin gilt sogar $I = N(S)$, denn sonst gäbe es einen Knoten $u \in N(S)$ mit $u \notin I$ und es gäbe damit einen M-alternierenden Weg von a nach u. Das ist aber nicht möglich, denn in $U(a)$ sind alle Knoten enthalten, die über einen M-alternierenden Weg zu erreichen sind und somit insbesondere in I alle Knoten aus B enthalten, die

über einen M-alternierenden Weg zu erreichen sind. Damit können wir aber schließlich folgern

$$|S| = |I| + 1 = |N(S)| + 1 > |N(S)|$$

das stellt aber einen Widerspruch zur Voraussetzung dar. $\square$

Satz 2.13 *Matchingsatz von Tutte (Satz und Beweis nach [8])*
Ein Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn für alle $S \subset V$ gilt $q(G - S) \leq |S|$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei M das perfekte Matching von G und $S \subset V$ beliebig. Wir bezeichnen die Komponenten von $G - S$ mit einer ungeraden Anzahl an Knoten mit $G_1, G_2, ..., G_k$. Es gilt also $n_{G_i} \equiv 1(\mod 2)$ für $i = 1, ..., k$. Da M ein perfektes Matching ist, gibt es zu jedem Knoten v in jedem G_i eine Kante in M, die mit v inzidiert. Insbesondere muss es mindestens einen Knoten geben (da es ja ungerade viele Knoten gibt), der in G_i mit einem Knoten außerhalb G_i verbunden ist. Hierfür kommt nur ein Knoten in S in Frage. Es gibt also für jede Komponente G_i eine Kante in M, die zwischen S und G_i verläuft. Insgesamt haben wir so k Kanten von den unterschiedlichen Komponenten nach S gefunden. Da es sich bei M um ein Matching handelt, müssen die gefundenen Knoten aus S, die mit den Knoten aus G_i verbunden sind, paarweise verschieden sein (sonst gäbe es zwei Kanten mit gleichem Endpunkt in M). Also gilt $q(G - S) = k \leq |S|$.
“$\Leftarrow$“: Sei nun also $q(G - S) \leq |S|$ richtig für alle $S \subset E$. Wir zeigen induktiv nach n_G, dass es dann ein perfektes Matching in G gibt. Da für den Fall $S = \emptyset$ die Bedingung gar nicht erfüllt sein kann, wenn n_G ungerade ist, reicht es, wenn wir gerade Knotenanzahlen betrachten. Wir beginnen unsere Induktion also mit $n = 2$ und führen den Induktionsschritt mit $n \to n + 2$ durch.
Induktionsanfang ($n = 2$): G muss in diesem Fall zusammenhängend sein, denn sonst gäbe es für $S = \emptyset$ bereits zwei Komponenten mit jeweils einem Knoten, also mehr als 0 ungerade Komponenten. Wenn G aber zusammenhängend ist, dann gibt es eine Kante zwischen den zwei Knoten in G und diese Kante stellt ein perfektes Matching dar.
Induktionsvoraussetzung: Für $n - 2$ gibt es unter der Bedingung, dass für jedes $S \subset V$ die Zahl der ungeraden Komponenten von $G - S$ kleiner gleich der Mächtigkeit von S ist, ein perfektes Matching.
Induktionsschritt ($n - 2 \to n$, n gerade): Ist $x \in V$ beliebig, so besteht $G - x$ aus einer ungeraden Anzahl an Knoten und somit gibt es mindestens eine Komponente mit ungerade vielen Knoten, es gilt also $q(G - x) \geq 1$. Setzen wir $S = \{x\}$, so wissen wir aber auf Grund der Voraussetzung, dass auch $q(G - x) \leq 1$ richtig ist, insgesamt also $q(G - x) = 1$ gilt. Demnach können wir S' so wählen, dass $|S'|$ maximal ist, so dass $q(G - S') = |S'|$ gilt. Dann gilt, dass $G - S'$ keine gerade Komponente besitzen kann. Gäbe es nämlich

eine gerade Komponente, so wählen wir einen Knoten v aus dieser geraden Komponente aus und berechnen

$$|S'| + 1 = 1 + q(G - S') \leq q(G - (S' \cup \{v\})) \leq |S' \cup \{v\}| = |S'| + 1$$

Dann sind also alle Ungleichungen in dieser Kette Gleichungen und insbesondere gilt dann $q(G - (S' \cup \{v\})) = |S' \cup \{v\}|$: Dann wäre aber $|S'|$ nicht maximal gewählt.
Seien nun $G_1, G_2, ..., G_k$ die Komponenten von $G - S'$, die nach obiger Überlegung sämtlich ungerade viele Knoten haben. Wir wählen nun eine beliebige Komponente G_i aus und einen Knoten $x \in V(G_i)$. Wir zeigen dann, dass es in $H = G_i - x$ ein perfektes Matching gibt. Dazu müssen wir nur zeigen, dass $q(H - S) \leq |S|$ für alle $S \subset V(H)$ gilt, dann können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden. Wir zeigen dies durch Widerspruch. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es ein $S^* \subset V(H)$ mit $q(H - S^*) > |S^*|$. Mit n_H muss auch $q(H - S^*) - |S^*|$ gerade sein (sonst wäre einer der beiden Ausdrücke gerade, der andere ungerade, summiert man die Knotenanzahl Modulo 2 auf, so erhielte man dann eine ungerade Anzahl an Knoten), also gilt sogar $q(H - S^*) \geq |S^*| + 2$. Damit berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} |S'| + |S^*| + 1 = |S' \cup S^* \cup \{x\}| &\geq q(G - (S' \cup S^* \cup \{x\})) \\ = q(G - S') - 1 + q(H - S^*) \geq |S'| - 1 + |S^*| + 2 &= |S'| + |S^*| + 1 \end{aligned}$$

Also müssen alle Ungleichungen in dieser Ungleichungskette Gleichungen sein, also insbesondere $|S' \cup S^* \cup \{x\}| = q(G - (S' \cup S^* \cup \{x\}))$ richtig sein. Das steht allerdings im Widerspruch zur Maximalität von S'.
Wir haben nun also ein perfektes Matching in jeder Komponente von $G - S'$ gefunden, wenn wir aus der jeweiligen Komponente einen beliebigen Knoten entfernen. Um noch zu zeigen, dass es tatsächlich ein perfektes Matching in ganz G gibt, reicht es, k Kanten zu finden, die die Komponenten $G_1, ..., G_k$ mit S' verbinden und paarweise nicht inzidieren. Hierzu konstruieren wir einen bipartiten Graphen B, dessen Knotenmenge aus k Knoten U_i sowie den k Knoten aus S'. besteht. Dabei repräsentiert U_i jeweils die Komponente G_i. In B gibt es eine Kante zwischen einem Knoten $s_j \in S$ und U_i genau dann, wenn in G mindestens eine Kante von s_j in die Komponente G_i hinein existiert. Wir zeigen nun, dass B ein perfektes Matching besitzt, dann liefern die Kanten dieses Matchings genau die gewünschten fehlenden Matching-Kanten für G. Wir bezeichnen mit $U = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ die Menge der Stellvertreterknoten für die Komponenten G_i. Dann gilt für eine beliebige Teilmenge $X \subset U$ von U: $N(X) \subset S'$, da B bipartit ist. Schreiben wir nun $X = \{U_{l_1}, ..., U_{l_r}\}$ und nennen die Menge der Nachbarn von X in B $R = N(X)$, so besitzt $G - R$ jedenfalls die Komponenten $U_{l_1}, ..., U_{l_r}$, die als ein-elementige Komponenten auch ungerade Komponenten sind. Daher gilt $|X| \leq q(G - R)$. Es folgt also

$$|X| \leq q(G - R) \leq |R| = |N(X)|, \forall X \subset U$$

Nach unserem gerade bewiesenen Lemma besitzt B also ein perfektes Matching und somit besitzt auch G ein perfektes Matching. $\square$

Mit Hilfe des Matching-Satzes von Tutte können wir nun einen Satz über faktor-kritische Graphen beweisen, der sich besonders im nächsten Kapitel als hilfreich erweisen wird.

Satz 2.14 *Satz über faktor-kritische Graphen (Aussage nach [4])*
Ein Graph $G = (V, E)$ ist faktor-kritisch, genau dann wenn $q(G-S) \leq |S|-1$ für jede nicht-leere Menge $S \subset V$ gilt.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei G zunächst faktor-kritisch und $S \subset V$ eine beliebige nicht-leere Teilmenge von V. Dann gibt es ein $v \in S$. Da G faktor-kritisch ist, gilt, dass $G' := G - v$ ein perfektes Matching besitzt. Nach Tuttes Matching Satz gilt also dass für beliebiges S' die Ungleichung $q(G' - S') \leq |S'|$ richtig ist. Setze $S' = S \setminus v$. Dann gilt

$$q(G - S) = q(G - v - S') = q(G' - S') \leq |S'| = |S| - 1$$

Da S beliebig gewählt war, gilt also die Aussage.
“$\Leftarrow$“: Sei nun also G mit der Eigenschaft gegeben, dass $q(G - S) \leq |S| - 1$ für alle nicht-leere Teilmengen $S \subset V$. Zu zeigen ist, dass dann für jeden Knoten $v \in V$ der Graph $G - v$ ein perfektes Matching besitzt. Sei also $v \in V$ beliebig gewählt. Weiterhin sei $S \subset G - v$ beliebig gewählt. Dann gilt mit $S' := S \cup \{v\}$:

$$q((G - v) - S) = q(G - S') \leq |S'| - 1 = |S| + 1 - 1 = |S|$$

Da S und v beliebig gewählt waren, besitzt $G - v$ also für alle $v \in V$ nach dem Satz von Tutte ein perfektes Matching. G selbst ist also faktor-kritisch.
$\square$

2.3 Totale Dominanz

Die Definitionen in diesem Kapitel folgen [4]. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit kritischen Graphen bezüglich totaler Dominanz. Der Begriff der Dominanz wurde in den graphentheoretischen Vorlesungen noch nicht eingeführt, daher bedarf es zunächst einer begrifflichen Klärung. Wir erinnern zunächst daran, dass die (offene) Nachbarschaft eines Knotens v eines Graphen G die Menge aller zu v adjazenten Knoten ist.

Definition 2.15 *Dominanz*
Sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne isolierten Knoten und $S \subset V$.

1. *Die geschlossene Nachbarschaft eines Knotens $v \in V$ sind alle Knoten, die zu v adjazent sind, sowie v selbst, wir schreiben $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.*

2. *Beide Nachbarschaftsbegriffe lassen sich auch auf Mengen verallgemeinern, in diesem Fall ist die Nachbarschaft von S die Vereinigung der Nachbarschaften aller Knoten in S und die geschlossene Nachbarschaft von S ist die Vereinigung der geschlossenen Nachbarschaften von Knoten in S. Wir schreiben $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ und $N[S] = \cup_{v \in S} N[v] = N(S) \cup S$.*

3. *S dominiert eine Teilmenge der Knoten $X \subset V$, falls $X \subset N[S]$ gilt. S dominiert X total, falls $X \subset N(S)$ richtig ist. Wir schreiben im Fall der Dominanz $S \succ X$ und im Fall der totalen Dominanz $S \succ_t X$.*

4. *Schließlich nennen wir S eine (totale) Dominanzmenge, falls S die Knotenmenge V (total) dominiert, also gilt $S \succ V$ ($S \succ_t V$).*

Bevor wir die Begriffe der Dominanzzahlen und der kritischen Graphen einführen, sei zunächst ein Beispiel gegeben, um den Begriff der Dominanz anschaulich zu machen.

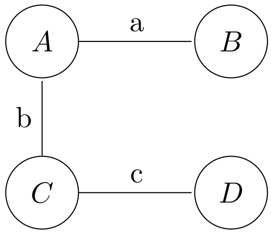

Abbildung 3: Beispielgraph zur Dominanz

Beispiel 2.16 *Wir betrachten den Graphen aus Bild 3. Die Knoten A und D bilden eine Dominanzmenge $S = \{A, D\}$ von G, denn über die Kante a ist der Knoten B mit S verbunden und über Kante c ist Knoten C mit S verbunden. Da*

$$N[S] = S \cup \{B\} \cup \{C\} = \{A, D\} \cup \{B\} \cup \{C\} = V$$

gilt, ist die geschlossene Nachbarschaft von S gleich der gesamten Knotenmenge von V. Allerdings handelt es sich bei S nicht um eine totale Dominanzmenge, denn A und D sind nicht adjazent, so dass A und D nicht in der Nachbarschaft von S sind. Es gilt also

$$N(S) = \{B, C\} \neq V$$

A und D dominieren allerdings $X = \{B, C\}$ und mit X natürlich auch jede Untermenge von X.
Wir können S durch die Hinzunahme eines weiteren Knoten, des Knotens C, zu einer totalen Dominanzmenge erweitern. Da C adjazent zu A und D ist, ist

$$N(\{A, C, D\}) = \{A, B, C, D\} = V$$

Es gibt allerdings auch eine totale Dominanzmenge mit nur zwei Knoten in G. Wir wählen die beiden Knoten A und C als S'. Dann ist A in der Nachbarschaft von S', weil C und A durch b verbunden werden, B ist wegen a in der Nachbarschaft von S', C ist durch b in der Nachbarschaft von S' und D durch c. Eine ein-elementige totale Dominanzmenge gibt es hingegen offensichtlich nicht. Wie wir im Folgenden sehen werden, ist die Größe der kleinsten totalen Dominanzmenge durchaus interessant.

Definition 2.17 *Dominanzzahl und kritische Graphen*

1. *Die totale Dominanzzahl $\gamma_t(G)$ eines Graphen G ist die Größe (also die Zahl der Knoten) der kleinsten totalen Dominanzmenge von G. Wir nennen eine totale Dominanzmenge der Größe $\gamma_t(G)$ eine $\gamma_t(G)$-Menge.*

2. *Wir nennen G einen totale Dominanz Kanten-kritischen Graphen, wenn die Hinzunahme einer beliebigen Kante die totale Dominanzzahl senken würde, wenn also gilt*

   $$\gamma_t(G+e) < \gamma_t(G)\ \forall e \in E_{\overline{G}}$$

   Dabei bezeichnet

   $$\overline{G} = (V_G, \{\{u,v\} : u \in V_G, v \in V_G, \{u,v\} \notin E_G\})$$

   den Komplementgraphen zu G. Wir schreiben kurz, G ist k_tEC, wobei EC für das englische „edge-critical“, also „Kanten-kritisch“ steht.

3. *Wir nennen einen Knoten v in G k_t-Knoten-kritisch, wenn*

   $$\gamma_t(G-v) < \gamma_t(G) = k$$

   gilt, wenn also die Entfernung des Knotens aus G die totale Dominanzzahl verringern würde.

4. *Schließlich nennen wir G k_t-Knoten-kritisch, wenn $\gamma_t(G-v) < \gamma_t(G) = k$ für alle Knoten gilt, die nicht adjazent zu einem Knoten des Grades 1 sind. Für die Knoten, die adjanzent zu Knoten des Grades 1 sind, können wir nicht fordern, dass sie k_t-Knoten-kritisch sind, denn ihre Entfernung ergäbe einen Graphen mit isoliertem Knoten. Für Graphen mit isolierten Knoten ist der Begriff der Dominanzzahl allerdings nicht definiert. Wir schreiben kurz, G ist k_tVC.*

Wenn wir von kritischen Graphen sprechen, beschäftigen wir uns der Einfachheit halber zumeist nur mit zusammenhängenden Graphen. Der Grund hierfür ist, dass im Fall eines Graphen mit mehreren Komponenten jede einzelne Komponente kritisch sein muss, wir die Aussage also dann komponentenweise verwenden können.

Beispiel 2.18 $3_t EC$*-Graph*
Wir betrachten nun einen Beispielsgraphen, von dem wir zeigen wollen, dass er $3_t EC$*-kritisch ist.*

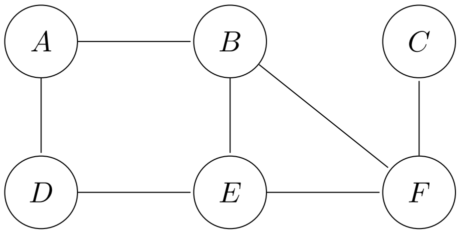

Abbildung 4: $3_t EC$-Graph

Zunächst sieht man sofort ein, dass zwei Knoten nicht reichen, um den ganzen Graphen total zu dominieren. Als totale Dominanzmengen der Größe zwei kämen grundsätzlich nur adjazente Knoten in Frage, man kann also schlicht die Kanten darauf überprüfen, ob sie eine totale Dominanzmenge darstellen. A und B dominieren den Knoten C nicht, A und D dominieren ebenfalls C nicht, B und E dominieren C nicht, B und F dominieren D nicht. E und F dominieren A nicht und F und C dominieren beispielsweise A nicht. Wir können aber erkennen, dass B, E und F eine totale Dominanzmenge der Größe drei sind. Da die drei Knoten in einem Dreieck liegen, dominieren sie einander, F dominiert C, E dominiert D und B dominiert A.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass das Hinzufügen einer beliebigen Kante die totale Dominanzzahl verringert. Insgesamt gibt es sechs Paare von nicht-adjazenten Knoten. In den folgenden Abbildungen ist jeweils eine der Kanten hinzugefügt und diejenigen Kanten, die eine totale Dominanzmenge der Größe 2 bilden, markiert. Das erste Beispiel wollen wir auch schriftlich diskutieren.

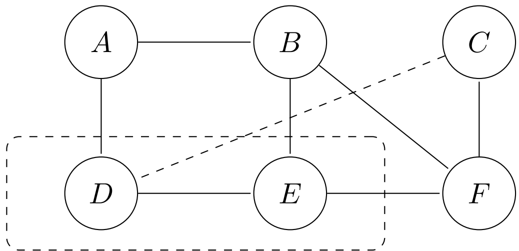

Abbildung 5: $3_t EC$-Graph mit zusätzlicher Kante $\{D, C\}$

Zunächst dominieren sich D und E gegenseitig, da sie adjazent zueinander sind. Weiterhin dominiert D die Knoten A, B und C (dank der neuen Kante), schließlich wird F durch E dominiert. D und E sind also tatsächlich eine totale Dominanzmenge der Größe 2.

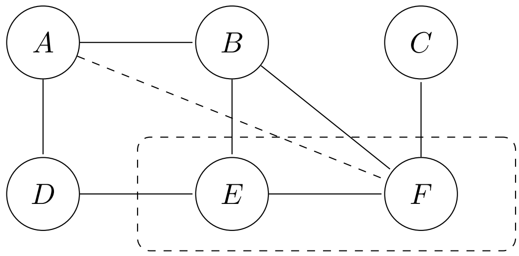

Abbildung 6: 3_tEC-Graph mit zusätzlicher Kante $\{A, F\}$

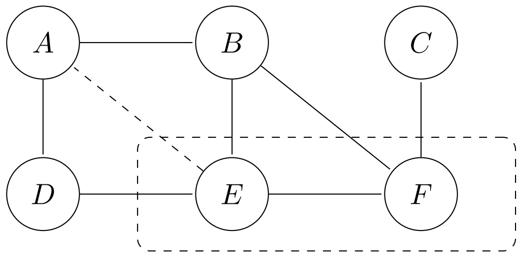

Abbildung 7: 3_tEC-Graph mit zusätzlicher Kante $\{A, E\}$

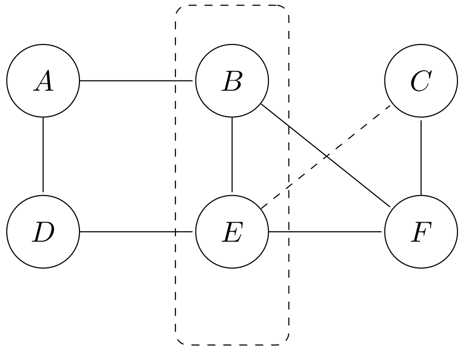

Abbildung 8: 3_tEC-Graph mit zusätzlicher Kante $\{C, E\}$

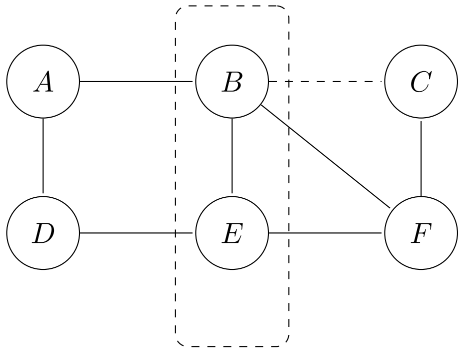

Abbildung 9: 3_tEC-Graph mit zusätzlicher Kante $\{B, C\}$

Für die letzte fehlende Kante rutschen Knoten B und C in der Grafik eine Position nach links, damit die Dominanzmenge leichter einzuzeichnen ist.

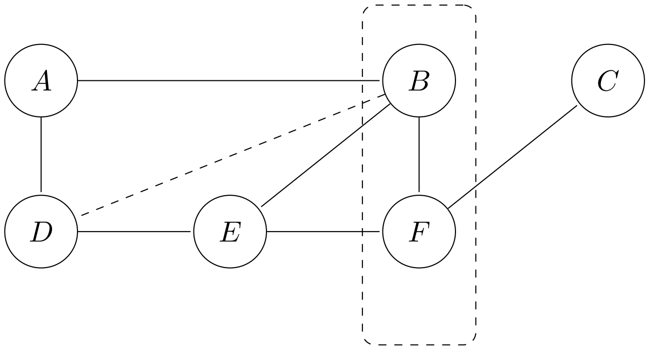

Abbildung 10: 3_tEC-Graph mit zusätzlicher Kante $\{B, D\}$

Beispiel 2.19 *Wir wollen nun noch ein Beispiel für einen Knoten-kritischen Graphen betrachten. Offensichtlich reichen wieder keine zwei Knoten aus, um den Graphen total zu dominieren, doch B, D und E reichen aus um G total zu dominieren:*

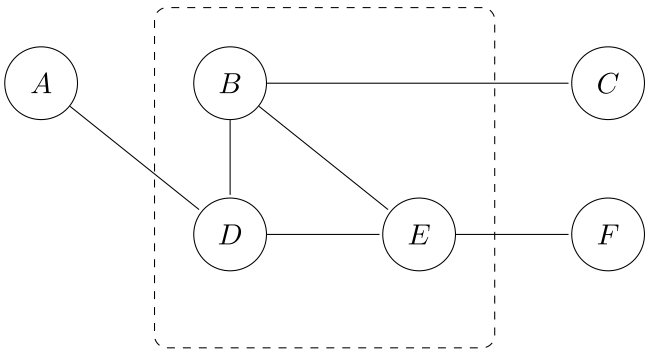

Abbildung 11: 3-Knoten-kritischer Graph

Wir bemerken, dass im Graph eine gewisse Symmetrie herrscht, die Knoten B, D und E bilden eine Clique und jeder dieser Knoten hat einen End-Knoten als Nachbarn. Knoten, die zu End-Knoten adjazent sind, können nicht kritisch sein, da diese nicht entfernt werden dürfen, ohne einen Graphen mit isolierten Knoten zu erhalten. Entfernt man jedoch einen der End-Knoten, so erhält man einen Graphen mit Dominanzzahl 2. Dieser Graph wird dominiert von dem Paar von Knoten, das immernoch adjazent zu einem End-Knoten ist. Wir betrachten hierzu nur das Beispiel, in dem der End-Knoten F entfernt wird.

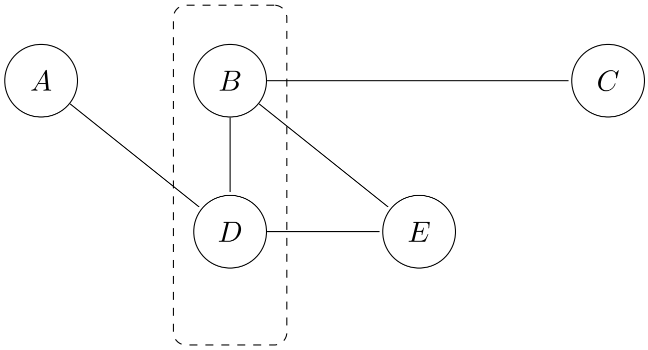

Abbildung 12: 3-Knoten-kritischer Graph um einen Knoten verkleinert

Die übrigen Fälle - Knoten A oder C werden entfernt - sind strukturell identisch, nur die Knotenbenennung variiert.

3 Perfekte Matchings und Totale Dominanz Kanten-kritische Graphen

Bevor wir untersuchen können, wann Totale Dominanz Kanten-kritische Graphen ein perfektes Matching besitzen, benötigen wir einige Hilfsaussagen.

3.1 3_tEC-Graphen mit End-Knoten

Wir werden zunächst zwei für die weitere Untersuchung wichtige Sätze aus [7] beweisen. Für den ersten benötigen wir aber zunächst ein Lemma, das ebenfalls in [7] formuliert wird, dort aber nicht bewiesen wird:

Lemma 3.1 *Es sei G ein Graph mit $\gamma_t(G) = 3$. Dann folgt: $\Delta(G) \leq n - 3$.*

Beweis: Generell muss gelten $\Delta(G) \leq n - 1$ für jeden Graphen. Wäre $\Delta(G) = n-1$, könnten wir aber eine zwei-elementige Dominanzmenge finden, wir wählen einen Knoten, der maximalen Grad hat und einen weiteren Knoten. Bleibt zu zeigen, dass G nicht Maximalgrad $n - 2$ haben kann. Wenn G Maximalgrad $n - 2$ hätte, so fänden wir wieder eine zwei-elementige Dominanzmenge. Zunächst wählen wir einen Knoten v aus, der den Grad $n-2$ hat. Dieser Knoten ist adjazent zu jedem Knoten außer einem einzelnen, nennen wir diesen u. Da G die Dominanzzahl 3 hat, muss G zusammenhängend sein, also ist u adjazent zu mindestens einem Knoten w. Da w allerdings - da es sich nicht um u handelt - adjazent zu v ist, können wir $\{w, v\}$ wählen und erhalten eine dominierende Menge für G. Alle Knoten außer v und u werden durch v dominiert, w dominiert v und u. □

Zum Beweis des folgenden Satzes brauchen wir außerdem noch den Begriff der privaten Nachbarschaft.

Definition 3.2 *Es seien $G = (V, E)$ ein Graph, $S \subset V$ und $x \in V$, dann ist die private Nachbarschaft von v bezogen auf S die Menge der Knoten aus V, die zu v (geschlossen) benachbart sind, aber zu keinem anderen Knoten, das heißt $pn(x, S) = N[x] \setminus N[S - \{x\}]$.*

Weiterhin benötigen wir noch ein Lemma, das ebenfalls in [7] genannt aber nicht bewiesen wird.

Lemma 3.3 *1. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u \in V$, $v \in V$ mit $\{u, v\} \notin E$. Wenn $\gamma_t(G + \{u, v\}) < \gamma_t(G)$ gilt, dann muss jede γ_t-Menge von $G + \{u, v\}$ mindestens einen der Knoten u und v enthalten.*

2. Für jeden 3_tEC-Graphen $G = (V, E)$ und nicht adjazente Knoten $u, v \in V$ gilt eine der beiden folgenden Möglichkeiten

(a) $\{u, v\} \succ G$

(b) gegebenenfalls nach Vertauschen von u und v gibt es ein $w \in N(u)$ so dass $\{u, w\} \succ_t G - v$

Beweis:

1. Angenommen es gäbe eine γ_t-Menge M von $G + \{u, v\}$, die weder u noch v enthält, dann muss $M \succ_t \{u, v\}$ auch in G gelten, denn die Kante $\{u, v\}$ kann nicht notwendig sein, damit M u und v dominiert werden. Alle anderen Knoten werden von M in $G + \{u, v\}$ sowieso nur über Kanten aus G dominiert. Das steht aber im Widerspruch zu $\gamma_t(G) > \gamma_t(G + \{u, v\})$.

2. Wir unterscheiden, ob die γ_t-Menge von $G+\{u, v\}$ gleich $\{u, v\}$ ist oder nicht. Falls die γ_t-Menge von $G+\{u, v\}$ gleich $\{u, v\}$ ist, so dominieren u und v ganz G außer u und v total. Da u und v jeweils in $\{u, v\}$ liegen, werden u und v durch $\{u, v\}$ ebenfalls dominiert, aber nicht total dominiert, da $\{u, v\} \notin E$.
   Ist andererseits die γ_t-Menge von $G + \{u, v\}$ ungleich $\{u, v\}$, so wissen wir nach Teil 1, dass wir annehmen können, dass die γ_t-Menge von $G + \{u, v\}$ die Form $\{u, w\}$ hat, wobei $w \in V$ ein Knoten aus $N(u)$ sein muss, da u und w sich sonst nicht total dominieren könnten. Der einzige Knoten, der durch die Kante $\{u, v\}$ von $\{u, w\}$ in $G + \{u, v\}$ im Vergleich zu G zusätzlich total dominiert werden kann, ist v, also muss $\{u, w\}$ ganz $G - v$ total dominieren.

$\square$

Satz 3.4 *(siehe [7]) Ist G ein 3_tEC mit Schnitt-Knoten x, dann ist x adjazent zu einem End-Knoten.*

Beweis: Seien also G und x wie im Satz gegeben. Dann nennen wir die beiden Komponenten von $G - x$ C_1 und C_2. Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch. Angenommen, beide Komponenten haben zwei oder mehr Knoten, anderenfalls wäre x adjazent zu einem End-Knoten gewesen. Da x ein Schnitt-Knoten ist, hat x mindestens einen Nachbarn in jeder Komponente, wir nennen einen Nachbarn in der Komponente C_1 u_1 und einen Nachbarn in C_2 u_2 und betrachten den Graphen $G + \{u_1, u_2\}$. Nun gibt es zwei Fälle. Entweder (1) $\{u_1, u_2\} \succ G$, oder (2) $\{u_1, w\}$ dominiert $G - u_2$ (gegebenenfalls nach Vertauschen der Benennungen von u_1 und u_2). Im Fall (1) ist $S = \{u_1, x, u_2\}$ eine γ_t-Menge von G. Nun gilt für $v \in \{u_1, u_2\}$: $\text{pn}(v, S) \cap (V - S) \neq \emptyset$, denn anderenfalls wäre bereits $S \setminus \{v\}$ eine totale Dominanzmenge für G (im Widerspruch dazu, dass $\gamma_t(G) = 3$ richtig ist) oder v wird nur in S benötigt, um einen weiteren Knoten $w \in S$ zu dominieren. Da aber u_1 und u_2 nicht adjazent sind, kommt für w nur der Knoten x in Frage, x ist aber adjazent sowohl zu u_1, als auch zu u_2, so dass der Knoten v in S unnötig wäre. Es gibt also einen privaten Nachbarn v_1 von u_1 und einen privaten Nachbarn v_2 von u_2. Wir betrachten nun den Graphen $G + \{v_1, v_2\}$ und beachten, dass weder v_1 noch v_2 den Knoten x dominieren, da sie aus der privaten Nachbarschaft von u_1 respektive u_2 stammen. Wir wählen nun

y so dass $\{v_1, y\} \succ_t G - v_2$ gilt. Das ist sicher möglich, da G Kanten-kritisch ist, vgl. Lemma 3.3. Allerdings muss y den Knoten $u_2 \in G - v_2$ dominieren, kann aber nicht gleich x sein, da x nicht adjazent zu v_1 ist. Dann gibt es aber einen Weg (v_1, y, u_2) von C_1 nach C_2 in $G - x$, was im Widerspruch dazu steht, dass x ein Schnitt-Knoten ist.
Im Fall (2) ist $\{u_1, w\}$ eine dominierende Kante für $G - u_2$. Der einzige Nachbar von u_1, der C_2 dominieren könnte, ist x, da x Schnitt-Knoten und $u_1 \in C_1$ ist. Also gilt $w = x$. Allerdings ist $\{x, u_2\} \in E(G)$ und somit hätten wir eine totale Dominanzmenge für G der Größe 2 gefunden, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass $\gamma_t(G) = 3$ gilt.[7] □

Folgerung 3.5 *(siehe [4]) Jeder 3_tEC Graph ohne End-Knoten ist 2-zusammenhängend.*

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Satz ist jeder Schnitt-Knoten in einem 3_tEC adjazent zu einem End-Knoten. Gibt es keine End-Knoten, so gibt es auch keine Schnitt-Knoten und somit ist der Graph 2-zusammenhängend.□
Für den zweiten Satz aus [7] benötigen wir ein wenig mehr Vorarbeit.

Lemma 3.6 *(siehe [7]) Es sei G ein 3_tEC Graph. Dann hat G höchstens einen End-Knoten.*

Beweis: Wir zeigen dies durch Widerspruch und nehmen an, es gäbe in G zwei End-Knoten u, v. Wir betrachten den Graphen $G + \{u, v\}$, für den es eine dominierende Kante geben muss, da G 3-kritisch angenommen wurde. Entweder ist $\{u, v\}$ diese dominierende Kante, oder es gibt einen Knoten $x \in N(u)$, so dass $\{u, x\}$ die dominierende Kante für $G + \{u, v\}$ ist (gegebenenfalls nach Tauschen der Benennung von u und v, vgl. Lemma 3.3). Im zweiten Fall dominiert x $V \setminus \{v\}$, es muss also jeder Knoten außer v und x selbst adjazent zu x sein. Dann gölte aber $d(x) \geq n - 2 > n - 3$, was Lemma 3.1 widerspricht. Bleibt also der Fall zu untersuchen, dass $\{u, v\}$ den Graphen $G + \{u, v\}$ dominiert. Dann kann G aber höchstens 4 Knoten enthalten, da $d(u) = d(v) = 1$ gilt (bis hier hin: vgl. [7]). Da ein Graph mit totaler Dominanz-Zahl 3 zusammenhängend sein muss, muss in dem Fall sogar $n = 4$ gelten, denn bei nur drei Knoten reichen sicher zwei Knoten aus um den Graphen total zu dominieren. Also untersuchen wir, ob es einen Graphen mit 4 Knoten geben kann, der 3-kritisch ist. Wenn $\Delta(G) > 2$ ist, so wählen wir einen Knoten mit $d(G) = 3$ sowie einen anderen Knoten und erhalten eine dominierende Menge der Größe 2. $\Delta(G) = 1$ ist ausgeschlossen, da G zusammenhängend sein muss. Im Fall $\Delta(G) = 2$ kann G nur eine lineare Kette oder ein Kreis sein, da G sonst nicht zusammenhängend wäre. In dem Fall gibt es also zwei adjazente Knoten mit Grad 2.

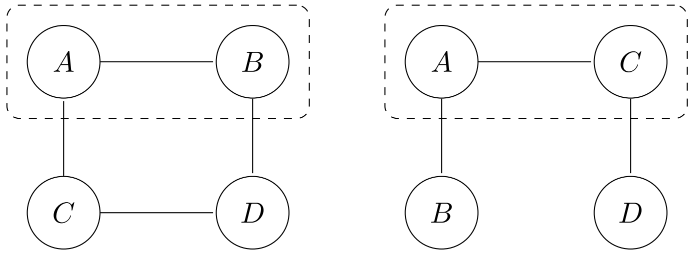

Abbildung 13: Skizze zu Lemma 3.6

Diese bilden offensichtlich eine total dominierende Menge, vergleiche Skizze zum Lemma. Es kann solch einen Graphen also nicht geben. □

Lemma 3.7 *(siehe [7]) Ist ein Graph $G = (V, E)$ ein 3_tEC-Graph, so gilt $2 \leq dm(G) \leq 3$*

Beweis: Die untere Schranke ist klar, denn wäre $\mathrm{dm}(G) = 1$, so wäre G ein vollständiger Graph und es würden 2 beliebige Knoten ausreichen, um G total zu dominieren. Bleibt zu zeigen, dass auch $\mathrm{dm}(G) \leq 3$ gilt. Wir zeigen dies durch Widerspruch und nehmen an, dass $\mathrm{dm}(G) \geq 4$ für einen 3_tEC-Graphen G gilt. Sei nun S eine γ_t-Menge von G. Es muss gelten $d(u, v) \leq 2$ für jedes Paar von Knoten $u, v \in S$, denn anderenfalls, wenn es ein $u, v \in S$ mit $d(u, v) > 2$ gäbe, so müssten sowohl u als auch v von dem dritten Knoten w dominiert werden, da sie einander offensichtlich nicht dominieren können. Dann gäbe es aber einen Weg von u nach v über w der Länge 2, was einen Widerspruch darstellen würde zur Annahme, dass $d(u, v) > 2$ gilt. Darum muss ebenfalls gelten $d(u, v) \leq 3$ für jedes Paar von Knoten $u \in S$ und $v \in V \setminus S$. Daher muss es ein Paar von Knoten $u, v \in V \setminus S$ geben, für das $d(u, v) \geq 4$ gilt. Wir können nun S schreiben als $S = \{x, y, z\}$ und annehmen, dass x adjazent zu y und y adjazent zu z ist. Wir betrachten nun den Graphen $G + \{u, v\}$. y kann weder von u, noch von v dominiert werden, denn angenommen einer der beiden Knoten, o.B.d.A. u dominiert y. Auch v muss adjazent zu einem Knoten aus S sein, sonst wäre S keine total dominierende Menge. Wenn v adjazent zu y wäre, wäre der Abstand von u und v aber nur 2, wenn v adjazent zu x oder z wäre, so wäre der Abstand von u und v nur 3, wir haben aber vorausgesetzt, dass der Abstand von u und $v \geq 4$ ist. Wir können also annehmen, dass es einen Knoten u_1 gibt, so dass $\{u_1, u\}$ eine Kante in G ist und $G - v$ dominiert. v muss adjazent zu x oder z sein, o.B.d.A. zu z. Dann dominiert u_1 also z - da u nicht adjazent zu z sein kann - und der Weg (u, u_1, z, v) verbindet u und v. Dieser Weg hat allerdings nur die Länge 3, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass $d(u, v) \geq 4$ gilt. Also kann es ein solches Paar von Knoten nicht geben.([7])□

Lemma 3.8 *Ist G ein 3_tEC Graph mit Schnitt-Knoten, dann ist $dm(G) = 3$ [7].*

Beweis: Sei G ein 3_tEC Graph mit Schnitt-Knoten v. Nach Satz 3.4 ist v adjazent zu einem End-Knoten u. Nach unserem gerade bewiesenen Lemma wissen wir auch bereits, dass $2 \leq \mathrm{dm}(G) \leq 3$ richtig ist, zu zeigen ist also nur noch, dass $\mathrm{dm}(G) \neq 2$. Angenommen $\mathrm{dm}(G) = 2$ wäre richtig, dann muss jeder Knoten adjazent zu v sein, denn v ist der einzige Nachbar von u, muss also über v jeden anderen Knoten in einem Schritt erreichen können. Dann ist aber $\{u, v\}$ eine total dominierende Menge von G, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht, dass $\gamma_t(G) = 3$ gilt.([7]) □

Lemma 3.9 *G sei ein 3_tEC Graph mit End-Knoten u. Dann ist u Teil jedes Weges, dessen Länge gleich dem Durchmesser dm(G) ist. [7]*

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Lemma gilt $\mathrm{dm}(G) = 3$. Wir zeigen auch dieses Lemma durch Widerspruch und nehmen an, dass es einen kürzesten Weg der Länge 3 zwischen zwei Knoten x und y gibt, auf dem u nicht liegt. u kann dann nicht adjazent zu x oder y sein, denn sonst könnte man einen Weg der Länge 4 finden, indem man den Weg um u verlängert. Wir betrachten den Graphen $G + \{x, y\}$. Da u weder adjazent zu x noch zu y ist, kann $\{x, y\}$ nicht total dominierende Menge von $G + \{x, y\}$ sein. Wir können also nach Lemma 3.3 annehmen, dass es einen Knoten w gibt, so dass $\{x, w\} \in E$ und $\{x, w\} \succ_t G + \{x, y\}$. Da u dominiert werden muss, muss w der (einzige) Nachbar von u sein. Betrachten wir nun den Graphen $G + \{x, u\}$ und sehen, dass $N(y) \cap \{x, u, w\} = \emptyset$ gelten muss. x kann nicht in der Nachbarschaft von y liegen, denn der kürzeste Weg zwischen x und y hat die Länge 3. w kann nicht in der Nachbarschaft von y liegen, da $\{x, w\}$ sonst ganz G total dominieren würde. Schließlich kann auch u nicht in der Nachbarschaft von y liegen, da, wie wir weiter oben festgestellt haben, es sonst einen Weg der Länge 4 in G gäbe. Dann muss aber $\{x, v\} \succ_t G - u$ mit einem zu x adjazenten Knoten v gelten, da x, u beide y nicht dominieren können. Dann muss aber gelten $v \in N(y) \cap N(x)$ und somit $d(x, y) < 3$ sein, was aber der Annahme widerspricht, dass $d(x, y) = 3$ gilt. ([7]) □

Wir können mit dieser Vorbereitung den zweiten wichtigen Satz aus [7] beweisen.

Satz 3.10 *(siehe [7]) $G = (V, E)$ sei ein Graph mit End-Knoten u, der adjazent zu dem Knoten v ist. Weiter seien $A = N(v) \backslash \{u\}$ und $B = V \backslash N[v]$. Dann ist G 3_tEC genau dann wenn*

1. *A eine Clique ist und $|A| \geq 2$,*
2. *B eine Clique ist und $|B| \geq 2$, sowie*
3. *jeder Knoten in A adjazent zu $|B| - 1$ Knoten in B und jeder Knoten in B adjazent zu mindestens einem Knoten A ist.*

Beweis: „⇒“: Sei G ein 3_tEC Graph mit Schnitt-Knoten v und seien A und B definiert wie im Satz. Nach unseren letzten beiden Lemmata ist $\mathrm{dm}(G) = 3$

und der End-Knoten u der adjazent zu v ist, liegt auf jedem Weg in G, der die Länge 3 hat. Wir betrachten nun einen kürzesten Weg zwischen zwei Knoten (x, y, v, u) mit $d(y, u) = 3$ und stellen fest, dass $x \in B$ und $y \in A$ gelten muss. Wir weisen nun die drei Eigenschaften nach.

1. Zunächst zeigen wir, dass $|A| \geq 2$ gilt. Angenommen $|A| = 1$ wäre richtig. Da aber G zusammenhängend und $\mathrm{dm}(G) = 3$ ist, muss jeder Knoten außer u adjazent zu y sein. Dann ist $\{y, v\}$ eine totale Dominanzmenge, was im Widerspruch dazu steht, dass $\gamma_t(G) = 3$ ist. Bleibt zu zeigen, dass A eine Clique ist. Nehmen wir an, dass A keine Clique ist, es also zwei Knoten $a, b \in A$ gibt, so dass $\{a, b\} \notin E$. Wir betrachten den Graphen $G + \{a, b\}$. Die Kante $\{a, b\}$ kann $G + \{a, b\}$ nicht total dominieren, da weder a noch b adjazent zu u ist. Daher existiert also ein $w \in N(a)$, so dass $\{a, w\} \succ_t G - b$. Der einzige Knoten, der u total dominiert ist allerdings v, welcher adjazent zu b ist. Würde es sich hierbei um eine totale Dominanzmenge für $G + \{a, b\}$ handeln, so wäre dies auch eine totale Dominanzmenge für G, was im Widerspruch dazu steht, dass $\gamma_t(G) = 3$ gilt.

2. y kann nicht adjazent zu ganz B sein, denn sonst wäre $\{v, y\}$ eine totale Dominanzmenge von G. Es gibt also einen Knoten in B der nicht adjazent zu y ist. Weiterhin wissen wir, dass $x \in B$ adjazent zu y ist, also ist $|B| \geq 2$. Um zu zeigen, dass B eine Clique ist, nehmen wir das Gegenteil an, dass es also zwei Knoten $a, b \in B$ gibt so dass $\{a, b\} \notin E$. Weder a noch b sind adjazent zu u, da nur v adjazent zu u ist und in der geschlossenen Nachbarschaft von v liegt. Somit ist $\{a, b\}$ keine total dominierende Kante von $G + \{a, b\}$. Wir können also annehmen, dass es einen Knoten c gibt, so dass $\{a, c\} \succ_t G + \{a, b\}$. Dann muss aber $c = v$ gelten, da u nur durch v total dominiert werden kann. Weiterhin muss $a \in N(v)$ liegen, damit v und a ebenfalls dominiert werden. Das steht aber im Widerspruch zu $a \in B$. Also kann es ein solches Paar von Knoten nicht geben und B ist eine Clique.

3. Es sei $a \in A$ beliebig und $b \in B$ so gewählt, dass $\{a, b\} \notin E$. Eine solche Kante muss existieren, da sonst mit einem beliebigen Knoten aus a und v ganz G total dominiert würde, aber $\gamma_t(G) = 3$ ist nach Voraussetzung richtig. Die Kante $\{a, b\}$ dominiert zudem $G + \{a, b\}$ nicht total, denn weder a noch b ist adjazent zu u. Es gibt also einen Knoten, der nur v sein kann (alle anderen Knoten dominieren u nicht total), so dass $\{a, v\} \succ_t G - b$. Also muss a alle Knoten dominieren die in $B \setminus \{b\}$ liegen. Es gibt also genau einen Knoten in B für jeden Knoten aus A, so dass die beiden Knoten nicht adjazent sind. Schließlich, wenn es einen Knoten b' in B gäbe, der zu keinem Knoten in A adjazent wäre, so wäre $d(u, b') \geq 4$, im Widerspruch zu $\mathrm{dm}(G) = 3$. (bis hier hin: [7])

"$\Leftarrow$": Es seien nun ein Graph G, sowie Mengen A und B und End-Knoten u mit adjazentem Knoten v wie in (1), (2) und (3) gegeben. Wir zeigen, dass G dann 3_tEC ist. Wir wählen einen Knoten a aus A beliebig aus. Dann sind alle Knoten aus A außer a total dominiert und v ist ebenfalls dominiert. Wählen wir zudem einen Knoten b aus B aus, der adjazent zu a ist. Dann sind auch a und alle Knoten aus B total dominiert. b selbst wird durch a dominiert. Schließlich wählen wir v aus und dominieren damit u, der als einziger Knoten bislang nicht total dominiert wurde. $\{a, b, v\}$ ist also eine totale Dominanzmenge von G, also $\gamma_t \leq 3$. Zwei Knoten reichen hingegen nicht aus, um G total zu dominieren, denn v muss auf jeden Fall ausgewählt werden, ein Knoten aus A muss ebenfalls ausgewählt werden um v zu dominieren, dann bleibt aber ein Knoten in B übrig, der nicht total dominiert wird.
Bleibt zu zeigen, dass, wenn wir eine Kante hinzufügen, die totale Dominanzzahl auf 2 sinkt.
Fügen wir eine Kante zwischen A und B hinzu, gibt es einen Knoten a' in A, der adjazent zu allen Knoten in B ist und so reichen v und a' aus, um ganz G zu überdecken.
Fügen wir eine Kante zwischen einem Knoten a^* aus A und u hinzu, so können wir mit a^* sämtliche Knoten aus A außer a^*, sowie u und v total dominieren. Wählen wir zusätzlich einen Knoten aus B aus, der adjazent zu a^* ist, so sind ganz B und a^* ebenfalls total dominiert und somit ganz G.
Fügen wir eine Kante zwischen einem Knoten b^* aus B und v hinzu, so können wir durch die Wahl von v ganz A, b^* und u total dominieren. Wählen wir zusätzlich b^* aus, so dominieren wir hiermit den Rest von B und v total.
Fügen wir eine Kante zwischen einem Knoten b' aus B und u hinzu, so können wir b' auswählen und dominieren dadurch u, mindestens einen Knoten $\overline{a}$ aus A und alle Knoten aus B außer b' total. Wählen wir zusätzlich $\overline{a}$ aus, wird zusätzlich ganz A außer $\overline{a}$ sowie v total dominiert.
In allen möglichen Fällen erhalten wir also eine totale Dominanzmenge der Mächtigkeit 2. □

3.2 Pfade aus Quasi-Kanten und Turnier-Graphen

Wir wollen nun nach [4] einige Hilfsaussagen beweisen, die notwendig sind um den Zusammenhang zwischen perfekten Matchings und totaler Dominanz zu untersuchen. Hierfür führen wir zunächst den Begriff des Turnier-Graphen ein.

Definition 3.11 *Turnier-Graph (nach [1])*
Ein Digraph G ist ein Turnier-Graph, wenn zwischen je zwei Knoten u und v genau eine Kante (u, v) oder (v, u) existiert. Ein Turnier-Graph ist also ein vollständiger Graph mit Orientierung.

Eine elementare Eigenschaft von Turnier-Graphen ist, dass sie immer einen gerichteten hamiltonschen Weg enthalten. Ein hamiltonscher Weg ist ein (gerichteter) Weg, auf dem jeder Knoten genau einmal besucht wird.

Lemma 3.12 *In einem Turnier-Graphen G existiert immer ein hamiltonscher Weg, Turniergraphen sind also immer semi-hamiltonsch.*

Beweis: Zeige dies induktiv über die Zahl n der Knoten in G.
Induktionsanfang ($n = 2$): Da G nur eine Kante enthält, ist die Aussage trivial erfüllt.
Induktionsvoraussetzung: In jedem Turnier-Graphen mit höchstens n Knoten gibt es einen hamiltonschen Weg.
Induktionsschritt ($n \to n + 1$): Es sei $w = (v_1, ..., v_n)$ ein hamiltonscher Weg in $G' = G - v$, der nach Induktionsvoraussetzung existiert. Unterscheide nun nach den Orientierungen der Kanten zwischen v_1 und v sowie zwischen v_n und v.

1. $(v, v_1) \in E$ und $(v_n, v) \in E$: Erweitere den Weg w zu $(v_1, ..., v_n, v)$. Das ist möglich wegen $(v_n, v) \in E$. Dieser Weg ist offensichtlich hamiltonsch für G.

2. $(v_1, v) \in E$ und $(v_n, v) \in E$: Wie Fall 1.

3. $(v, v_1) \in E$ und $(v, v_n) \in E$: Erweitere den Weg w zu $(v, v_1, ...v_n)$. Das ist möglich, weil $(v, v_1) \in E$ richtig ist.

4. $(v_1, v) \in E$ und $(v, v_n) \in E$. In diesem Fall können wir v nicht einfach an den Anfang oder das Ende des Weges setzen. Wir können allerdings sicher eine Stelle finden, an der wir v in w einfügen können. Wir untersuchen absteigend für $i = n - 1, ..., 1$: Ist $(v_i, v) \in E$? Falls nein, so halten wir fest, dass $(v, v_i) \in E$ gilt und setzen mit dem nächstkleineren i fort. Falls ja, so wissen wir aus der vorherigen Iteration, dass $(v, v_{i+1}) \in E$ richtig ist. Also können wir w modifizieren zu $w' = (v_1, v_2, ..., v_i, v, v_{i+1}, ..., v_n)$ und erhalten einen hamiltonschen Weg w'.
   Dieses Verfahren wird auf jeden Fall eine Position finden an der v eingefügt werden kann, denn spätestens wenn $i = 1$ untersucht wird, gilt $(v_i, v) \in E$ nach Voraussetzung.

Da wir also in jedem der vier Fälle einen hamiltonschen Weg in G finden können, gilt die Aussage des Lemmas. □

Beispiel 3.13 *Turnier-Graph mit Hamilton-Weg*
In der Abbildung ist ein Turnier-Graph zu sehen und ein Hamilton-Weg markiert. Die schwarzen Kanten gehören zum Hamilton-Weg, die grauen Kanten nicht.

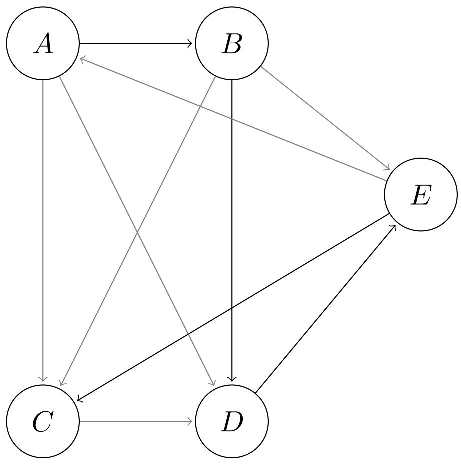

Abbildung 14: Turnier-Graph mit eingezeichnetem Hamilton-Weg

Mit Hilfe des Turnier-Graphen können wir nun folgendes Lemma beweisen, der Beweis stammt ursprünglich aus [6], die Darstellung folgt aber [4]. Zuvor führen wir noch die Begriffe der fehlenden Kante und der Quasi-Kante ein.

Definition 3.14
1. *Es sei $G = (V, E)$ ein 3_tEC-Graph und u, v zwei in G nicht adjazente Ecken. Dann bezeichnen wir $\{u, v\}$ als fehlende Kante. Sind $u, v \in S \subset V$, so sagen wir auch, dass $\{u, v\}$ eine fehlende Kante in S ist.*

2. *Ist G ein 3_tEC-Graph und $\{u, v\}$ eine fehlende Kante, dann ist $\gamma_t(G + \{u, v\}) = 2$, weil G kritisch ist. Es gibt also eine Kante $\{x, y\} \in E \cup \{u, v\}$, die $G + \{u, v\}$ total dominiert (Es gibt eine totale Dominanzmenge von zwei Knoten und diese beiden Knoten müssen adjazent sein, da sie sonst sich selbst nicht total dominieren würden). Wir wählen eine solche Kante $\{x, y\}$ (es kann mehrere solche Kanten geben) aus und nennen diese die Quasi-Kante für $\{u, v\}$. Für jede fehlende Kante in G bestimmen wir also eine eindeutige Quasi-Kante. Wir schreiben kurz $qe_G(\{u, v\}) = \{x, y\}$.*

Lemma 3.15 *(vgl. [4])Es sei $G = (V, E)$ ein 3_tEC Graph und X eine unabhängige Menge in G mit $k \geq 3$ Knoten. Dann gibt es eine Ordnung $x_1, x_2, ..., x_k$ der Knoten in X so dass es einen Pfad $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ in $G - X$ gibt, in dem $\{v_i, x_i\}$ Quasi-Kante für die fehlende Kante $\{x_i, x_{i+1}\}$, $i = 1, 2, ..., k - 1$ ist.*

Beweis: Hierzu konstruieren wir einen Turnier-Graphen T, dessen Knotenmenge $V_T = X$ ist. Es gibt für jedes Paar von unterschiedlichen Knoten u und v in X (die ja nicht adjazent sind, da X eine unabhängige Menge ist) eine Quasi-Kante e, die entweder mit u oder mit v adjazent ist, aber nicht mit beiden. Eine solche Kante gibt es, da $|X| \geq 3$ und die Quasi-Kante zu zwei Knoten in x auch jeden Knoten in X dominieren muss - eine Kante e die in $G + e$ innerhalb von X verläuft kann aber höchtens zwei Knoten von X dominieren, schließlich ist X eine unabhängige Menge in G, hat also in $G + e$ immernoch $|X| - 1 \geq 2$ Komponenten. Wenn die Quasi-Kante e mit v inzidiert, orientiere die Kante in T zwischen v und u so, dass sie von v nach u zeigt, anderenfalls soll die Kante von u nach v zeigen. Nach obigem Lemma existiert ein orientierter hamiltonscher Weg w in T, da T ein Turnier-Graph ist. Die Knoten in T seien nun nach ihrem Auftauchen in w numeriert, so dass $w = (x_1, x_2, ..., x_k)$ gilt. Es sei nun $\{v_i, x_i\}$ die Quasi-Kante für die fehlende Kante $\{x_i, x_{i+1}\}$. Wie oben bereits angemerkt, haben wir die Quasi-Kanten für jedes Paar von Knoten aus X so wählen können, dass immer genau ein Ende der Kante in X liegt, also gilt $v_i \in V \setminus X$. Weiterhin gilt nach Definition $v_i \succ X \setminus \{x_{i+1}\}$, da es sich bei $\{v_i, x_i\}$ um eine Quasi-Kante für $\{x_i, x_{i+1}\}$ handelt. Daraus folgt, dass die v_i paarweise disjunkt sein müssen, da sonst, falls $v_i = v_j, i \neq j$ richtig wäre v_i zusammen mit x_i eine total dominierende Menge für ganz G darstellen würde, G hat aber die totale Dominanzzahl 3. Da nun v_i und x_i den Graphen $G - x_{i+1}$ total dominieren und $\{v_i, x_{i+1}\} \notin E$ nach Wahl der Quasi-Kanten gilt und somit insbesondere x_i und v_{i-1} nicht adjazenzt sind, ist $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ und somit $(v_1, v_2, ..., v_{k-1})$ ein Weg in $G - X$. □

3.3 Matchings in 3_tEC-Graphen ohne Schnitt-Knoten

Lemma 3.16 *(vgl. [4])Falls S ein Knoten-Schnitt in einem 3_tEC Graphen G ist, hat $G - S$ höchstens $|S| + 1$ Komponenten*

Beweis: Angenommen, die Anzahl der Komponenten von $G - S$ überschreite $|S| + 1$, dann sei $k = |S|$. Da ein Graph mit totaler Dominanzzahl 3 zusammenhängend sein muss (wir haben keine Loops zugelassen, so dass in jeder Komponente mindestens zwei Knoten ausgewählt werden müssen um eine totale Dominanz-Menge zu erhalten), kann k nicht 0 sein. Es gilt also $k \geq 1$. Es gibt also mindestens $k + 2$ Komponenten in $G_1, G_2, ..., G_{k+2}$ in $G - S$. Weiterhin sei x_i ein Knoten in G_i für $i = 1, ..., k + 2$ und $X = \{x_1, ..., x_{k+1}\}$. Dann ist X eine unabhängige Menge mit $k + 1 \geq 3$ Knoten in G. Nach dem vorherigen Lemma können wir also annehmen, dass die Knoten in X so geordnet sind (gegebenenfalls müssen wir die Numerierungen der Komponenten G_i entsprechend anpassen), dass $(v_1, v_2, ..., v_{k+1})$ ein Pfad in $G - X$ ist, wobei $\{v_i, x_i\}$ die Quasi-Kante zur fehlenden Kante $\{x_i, x_{i+1}\}$ $(i = 1, ..., k + 1)$ ist. Wir halten weiter fest, dass $\{v_i, x_i\} \in E$ liegt und $v_i \succ X \setminus \{x_{i+1}\}$ richtig ist. Da $|X| \geq 3$, kann v_i zu keiner der Komponenten G_i gehören (da es sonst zu mindestens zwei Komponenten gehören müsste, dann wären es aber keine verschiedenen Komponenten). Also gilt $v_i \in S$ für alle $i \in \{1, ..., k + 1\}$. Also gilt $\{v_1, v_2, ..., v_{k+1}\} \subset S$, also $k + 1 \leq |S| = k$, ein Widerspruch. □

Auf dieser Basis können wir nun das Hauptergebnis dieses Kapitels formulieren und beweisen.

Satz 3.17 *(vgl. [4]) Jeder $3_t EC$ 2-zusammenhängender Graph mit gerade vielen Knoten hat ein perfektes Matching und jeder $3_t EC$ 2-zusammenhängender Graph mit ungerade vielen Knoten ist faktor-kritisch*

Beweis: Um diese Aussage zu beweisen, zerteilen wir sie zunächst in Teilaussagen. In einem ersten Schritt beweisen wir:

1. *Jeder $3_t EC$ 2-zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit gerade vielen Knoten hat ein perfektes Matching:* Sei S ein Knoten-Schnitt in G, dann wissen wir nach dem gerade bewiesenen Lemma, dass $G - S$ höchstens $|S| + 1$ Komponenten hat. Insbesondere, da G gerade viele Knoten hat, hat $G - S$ höchstens $|S|$ viele Komponenten mit ungerade vielen Knoten, in Zeichen $q(G - S) \leq |S|$.

   (a) *Zeige dass $q(G - S) \leq |S|$ gilt:* Angenommen, $G - S$ hätte $|S| + 1$ ungerade Komponenten, dann hätte G insgesamt $(|S| + 1) \cdot 1 + |S| \mod 2$ Knoten $(\mod 2)$. Falls nun $|S| \equiv 1(\mod 2)$ gölte, dann wäre $|S| + 1 \equiv 0(\mod 2)$ und damit die obige Summe äquivalent zu 1 modulo 2 - im Widerspruch dazu dass G gerade viele Knoten hat. Wäre andernfalls $|S| \equiv 0(\mod 2)$ richtig, dann wäre $(|S| + 1) \cdot 1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1(\mod 2)$, dazu wird eine Zahl addiert, die 0 modulo 2 ist. Also hätte G wiederum ungerade viele Knoten, was im Widerspruch zur Voraussetzung stünde.
   Der Matching-Satz von Tutte besagt dann, dass G tatsächlich ein perfektes Matching hat.

2. *Jeder $3_t EC$ 2-zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit ungerade vielen Knoten ist faktor-kritisch:* Wir nehmen an, die Aussage wäre falsch, und es gäbe einen 3_tEC 2-zusammenhängenden Graphen mit gerade vielen Knoten, der nicht faktor-kritisch ist. Dann existiert nach dem Theorem über faktor-kritische Graphen eine nicht-leere Teilmenge $S \subset V$, so dass $q(G - S) \geq |S|$ richtig ist. Weiterhin hat G ungerade viele Knoten, es gilt also sogar $q(G - S) \geq |S| + 1$ (gleiche Argumentation wie in 1a). Weiterhin haben wir im vorherigen Lemma gesehen, dass die Zahl der Komponenten von $G - S$ durch $|S| + 1$ von oben beschränkt ist und damit auch $q(G - S) \leq |S| + 1$ gilt. Insgesamt muss also gelten $q(G - S) = |S| + 1$ und $G - S$ hat keine Komponente mit gerade vielen Knoten. Wir nennen die Komponenten von $G - S$ nun $G_1, G_2, ..., G_{k+1}$ und deren Knotenmengen $V_1, V_2, ..., V_{k+1}$. Da G 2-zusammenhängend ist, müssen mindestens zwei Knoten in S liegen, damit $G - S$ mehr als eine Komponente haben kann, also ist $k \geq 2$.

Weiterhin setzen wir $X = \{x_1, x_2, ..., x_{k+1}\}$, wobei $x_i \in V_i$ für alle $i = 1, ..., k+1$ gilt. Dann handelt es sich bei X um eine unabhängige Menge in G der Größe $k+1 \geq 3$. Wir nennen nun $Y = V \setminus S$ und halten fest, dass alle Knoten in Y zu Komponenten mit ungerade vielen Knoten gehören, da G keine Komponenten mit gerade vielen Knoten besitzt. Nach Lemma 3.15 können wir (gegebenenfalls nach Umnummerierung der Komponenten G_i) annehmen, dass die Knoten in X so geordnet sind, dass es einen Weg $v_1, v_2, ..., v_k$ in $G - X$ so gibt, dass $\{v_i, x_i\}$ die Quasi-Kante für die fehlende Kante $\{x_i, x_{i+1}\}$ $(i = 1, 2, ..., k)$ ist. Dann gilt also $\{v_i, x_i\} \succ_t G - x_{i+1}$ (nach Definition der Quasi-Kante), $\{v_i, x_i\} \in E$ (sonst wären x_i und v_i nicht total dominiert durch x_i und v_i in $G - x_{i+1}$) und $\{v_i, x_{i+1}\} \notin E$ (da die Dominanzzahl von G nach Voraussetzung 3 ist). Weiterhin gilt $v_i \succ Y \setminus (V_i \cup \{x_{i+1}\})$ (Da x_i zu keinem Knoten aus einer anderen Komponente von $G - S$ adjazent ist und durch die fehlende Kante $\{x_i, x_{i+1}\}$ auch nur x_{i+1} zusätzlich dominieren kann, müssen alle anderen Knoten aus Komponenten von $G - S$ - abgesehen von x_is eigener Komponente G_i, durch v_i dominiert werden, sonst könnte $\{x_i, v_i\}$ nicht die gewünschte Quasi-Kante sein.) und schließlich wegen $|X| \geq 3$ gilt $v_i \in S$. Da das i beliebig gewählt war, gilt somit auch $\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset S$. Da zudem $|S| = k$ nach Voraussetzung gilt, gilt sogar $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Wir halten noch fest, dass $x_1 \succ S$ (denn x_1 ist adjazent zu v_1 nach Lemma 3.15 und x_1 ist adjazent zu allen v_i, $i = 2, ..., k$, weil jedes dieser v_i jeden Knoten aus V_1 dominieren muss nach der Feststellung $v_i \succ Y \setminus (V_i \cup \{x_{i+1}\}))$ richtig ist, aber kein Knoten in S die Menge $Y \setminus V_1$ dominiert, da sonst ein solcher Knoten zusamen mit x_1 eine totale Dominanzmenge der Größe 2 von ganz G wäre, was im Widerspruch dazu steht, dass die totale Dominanzzahl von G 3 ist. Daraus folgt direkt, dass V_1 eine Clique ist, denn wäre V_1 keine Clique, so gäbe es in V_1 eine fehlende Kante. Hinzufügen dieser Kante würde aber die totale Dominanzzahl nicht verringern, was im Widerspruch dazu stünde, dass G kritisch ist.
Wir zeigen nun drei wichtige Teilaussagen, um schließlich damit die Gesamtaussage zu folgern. Zunächst zeigen wir in 2a, dass S adjazent zu jedem Knoten in V_1 ist, dann in 2b, dass V_i eine Clique ist für $i = 1, 2, ..., k+1$ und schließlich in 2c, dass S eine Clique ist.

(a) *Zeige dass S adjazent zu jedem Knoten in V_1 ist:* Da wir bereits zuvor gesehen haben, dass für $i = 2, ..., k$ $v_i \succ V_1$ gelten muss, wissen wir schon von jedem Knoten aus S außer v_1, dass dieser adjazent zu jedem Knoten aus V_1 ist. Es bleibt also zu zeigen, dass auch v_1 adjazent zu jedem Knoten aus V_1 ist. Hierzu betrachten wir einen beliebigen Knoten $x_1' \in V_1 \setminus \{x_1\}$ und zeigen, dass v_1 und x_1' adjazent sind. Da wir bereits wissen, das v_1 und x_1 adjazent sind und wir x_1' beliebig wählen, folgt dann, dass v_1 zu jedem Knoten in V_1 adjazent ist. Wir betrachten die fehlende Kante $\{x_1', x_2\}$ (die fehlen muss, da x_2 aus G_2 stammt und somit zu keinem Knoten in G_1 adjazent sein kann). Da es mindestens drei Komponenten G_i gibt, gibt es also mindestens eine weitere Komponente G_3 neben G_1 und G_2. Weder x_1' noch x_2 können adjazent zu einem Knoten in G_3 sein, also dominieren x_1' und x_2 sicher nicht ganz V. Außerdem kann die Kante $\{v_1, x_2\}$ in G nicht existieren, da sonst die totale Dominanzzahl von G nicht 3 sein könnte. Da nun weder x_2 zu einem x_{j+1}, $j = 2, ..., k$ adjazent ist - wieder weil diese aus einem anderen Komponentengraphen stammen - noch v_j adjazent zu x_{j+1} ist - sonst wäre die totale Dominanzzahl 2 - bleibt nur $\{v_i, x_1'\}$ als Quasi-Kante zur fehlenden Kante $\{x_1', x_2\}$ übrig. Insbesondere, da $v_i \neq x_2$ gilt, muss diese Quasi-Kante in G liegen und damit v_i und x_1' adjazent sein.

(b) *Zeige, dass V_i, $i = 1, ..., k+1$ eine Clique ist.:* Wir führen den Beweis dieser Teilaussage mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises. Angenommen es gäbe ein $i \in \{1, 2, ..., k+1\}$, so dass V_i keine Clique ist. Wir haben bereits festgestellt, dass V_1 eine Clique sein muss, also muss dann gelten $i \geq 2$. Da V_i keine Clique ist, gibt es in V_i eine fehlende Kante $\{a, b\}$ und da G Kanten-kritisch ist, gibt es eine Quasi-Kante e zu $\{a, b\}$. Da a und b beide aus V_i stammen, können sie nicht ganz V dominieren, schließlich ist kein Knoten aus einer anderen Komponente adjazent zu a und b. Also kann die Quasi-Kante nur entweder $\{a, v\}$ oder $\{b, v\}$ für ein $v \in S$ sein. Wir können o.B.d.A anehmen, dass die Quasi-Kante $\{a, v\}$ ist, denn anderenfalls können wir die Benennung von a und b einfach umdrehen. Wäre nun $v \neq v_{i-1}$, dann wäre wegen $\{v, b\} \notin E$ (sonst wäre wieder die Dominanzzahl 2 statt 3) $v = v_i$ (wir hatten bereits festgestellt, dass $v_j \succ Y \setminus (V_j \cup \{x_{j+1}\})$ für alle $j = 1, ..., k$ richtig ist) und $i \leq k$ (da es kein v_{i+1} gibt). Dann ist aber x_{i+1} nicht durch a und v dominiert und $\{a, v\}$ könnte nicht die gesuchte Quasi-Kante sein. Es muss also gelten $e = \{a, v_{i-1}\}$. Da v_{i-1} alle Knoten in V_i außer x_i dominiert, muss $b = x_i$ gelten, denn sonst würde b ebenfalls durch v_{i-1} dominiert werden und die fehlende Kante wäre unnötig um G mit a, v_{i-1} total zu dominieren - das stünde aber im Widerspruch dazu, dass G die totale Dominanzzahl 3 hat. Außerdem muss dann gelten $\{a, v_{i-1}\} \in E$, da $a \neq b = x_i$ richtig ist. Wir betrachten nun die fehlende Kante $\{a, x_1\}$. Diese Kante ist sicher eine fehlende Kante, denn $x_1 \in G_1$ und $a \in G_i \neq G_1$. Es muss nun für ein $j \in \{1, 2, ..., k\}$ gelten, dass $\{a, v_j\} \succ_t G - x_1$ oder $\{v_j, x_1\} \succ_t G - a$, da es zu dieser fehlenden Kante wiederum eine Quasi-Kante geben muss, die entweder von der Form $\{v_j, a\}$ oder von der Form $\{v_j, x_1\}$ sein muss. Im ersten Fall kann $\{v_j, x_1\}$

keine Kante in E sein, da sonst $\{a, v_j\}$ G total dominieren würde, dann würde aber x_1 S nicht dominieren, was 2a widersprechen würde. Im zweiten Fall könnte analog $\{a, v_j\}$ keine Kante in E sein. Dann gölte aber $j \neq i-1$, denn wir haben bereits festgestellt, dass $\{a, v_{i-1}\} \in E$ gilt. Dann ist aber $\{v_j, x_{j+1}\} \in E$ (da x_1 nicht adjazent zu x_{j+1} ist, muss v_j es sein, damit die beiden Knoten $G - a$ total dominieren können.), was wir allerdings in Lemma 3.15 bereits ausgeschlossen haben, also ist V_i für alle $i = 1, ..., k$ eine Clique.

(c) *Zeige dass S eine Clique ist:* Wir betrachten für alle i, j mit $1 \leq i < j \leq k$ die fehlende Kante $\{x_{i+1}, x_{j+1}\}$. Entweder gilt $\{x_{i+1}, v\} \succ_t G - x_{j+1}$ oder es gilt $\{x_{j+1}, v\} \succ_t G - x_{i+1}$ für einen Knoten $v \in S$. Im ersten Fall ist $\{v, x_{j+1}\} \notin E$, da sonst $\{x_{i+1}, v\} \succ_t G$ gölte. Also ist dann $v = v_j$. Da weiterhin $\{v_i, x_{i+1}\} \notin E$ gilt, muss $\{v_i, v_j\} \in E$ sein, da sonst v_i nicht dominiert würde. Im zweiten Fall hingegen, wenn $\{x_{j+1}, v\} \succ_t G - x_{i+1}$ gilt, muss $\{v, x_{i+1}\} \notin E$ sein, da die beiden Knoten sonst ganz G total dominieren würden. Also gilt in dem Fall $v = v_i$. Da aber wiederum $\{v_j, x_{j+1}\} \notin E$ gilt, muss $\{v_i, v_j\} \in E$ liegen (gleiche Argumentation wie in Fall 1). Da dies für jedes Paar von (i, j) mit $1 \leq i < j \leq k$ gilt, ist also jedes Paar von Knoten in S adjazent und S somit eine Clique.

(d) *Führe die Annahme G sei nicht faktor-kritisch zum Widerspruch:* Wir zeigen nun für $i = 1, 2, ..., k$, dass $v_i \succ V \setminus \{x_{i+1}\}$. Dann gilt aber $\{v_1, v_2\} \succ_t V$, da v_1 und v_2 adjazent sind nach 2c. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass die Dominanzzahl von G 3 ist. Wähle also hierzu ein $i \in \{1, 2, ..., k\}$ beliebig. Wir wissen bereits, dass $v_i \succ V \setminus (V_i \cup \{x_{i+1}\})$ gilt. Angenommen es gölte für ein i nicht $v_i \succ V_i$. In 2a haben wir bereits gesehen, dass $v_1 \succ V_1$ gilt, also muss $i \geq 2$ sein. Da $\{v_i, x_i\} \in E$ liegt, muss es einen Knoten $y_i \in V_i \setminus \{x_i\}$ geben, der nicht adjazent zu v_i ist. $\{x_{i+1}, y_i\}$ ist eine fehlende Kante in G, denn x_{i+1} und y_i sind aus unterschiedlichen Komponenten von $G - S$. Es gibt wiederum einen Knoten $v \in S$, so dass entweder $\{v, x_{i+1}\} \succ_t G - y_i$ oder $\{v, y_i\} \succ_t G - x_{i+1}$ richtig ist. Im ersten Fall muss $\{v, x_{i+1}\} \in E$ richtig sein, weil sonst v und x_{i+1} nicht von v und x_{i+1} total dominiert würden. Außerdem kann dann $\{v, y_i\}$ keine Kante in G sein, da sonst sogar ganz G von diesen beiden Knoten total dominiert würde. Allerdings ist v_i der einzige Knoten in S, der möglicherweise nicht adjazent zu y_i ist (vgl. Überlegungen vor 2a), also wäre dann $v = v_i$. Dann wäre aber $\{v, x_i\} \notin E$, was einen Widerspruch darstellt. Gilt andersherum $\{v, y_i\} \succ_t G - x_{i+1}$, dann muss $v = v_i$ gelten, da v und x_{i+1} nicht adjazent sein können (sonst würde $\{v, x_j\}$ ganz G total dominieren). Allerdings gilt $\{y_i, v_i\} \notin E$, was im Widerspruch dazu steht, dass y_i und v_i $G - x_{i+1}$ total dominieren (da sie einander nicht total dominieren könnten). Also ist auch dieser Fall nicht möglich und es gilt tatsächlich $v_i \succ V \setminus \{x_{i+1}\}$ für alle $i = 1, 2, ..., k$ und damit folgt wie oben angemerkt die Behauptung.

□

Bevor wir uns im Weiteren mit den übrigen Fällen von Kanten-kritischen Graphen, sowie Knoten-kritische Graphen beschäftigen, betrachten wir zunächst ein Beispiel für beide Fälle des obigen Satzes.

Beispiel 3.18 *Zunächst betrachten wir den Fall gerader Knoten-Anzahl. Das Beispiel sollte noch aus dem letzten Kapitel bekannt sein, dort haben wir ausführlich gezeigt, dass dieser Graph tatsächlich 3_tEC ist. Unser gerade bewiesener Satz besagt, dass sich in dem Graphen ein perfektes Matching finden lassen muss. Tatsächlich finden wir ein perfektes Matching, $M = \{\{A, B\}, \{D, E\}, \{C, F\}\}$. Die Matching-Kanten sind im Graphen schwarz eingezeichnet, die übrigen Kanten grau.*

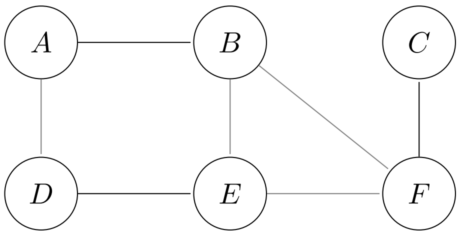

Abbildung 15: 3_tEC-Graph

Im Falle ungerade vieler Knoten betrachten wir den Kreis C_5 mit fünf Knoten. Offensichtlich reichen zwei Knoten nicht aus, um den Graphen total zu dominieren, denn eine Dominanzmenge von zwei Knoten müsste aus zwei adjazenten Knoten bestehen, dann gibt es aber immer einen Knoten, der den Abstand 2 von beiden Knoten in der betrachteten Menge hat. Weiterhin kann durch das Hinzufügen einer beliebigen Kante die Dominanzzahl auf zwei gesenkt werden, indem man schlicht die beiden neu verbundenen Knoten auswählt. Beliebige drei adjazente Knoten in C_5 bilden eine totale Dominanzmenge der Mächtigkeit 3.

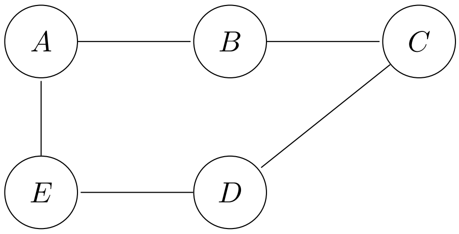

Abbildung 16: C_5

Unser gerade bewiesener Satz besagt, dass der Graph C_5 Faktor-kritisch ist. Und tatsächlich gilt: Wählen wir nun einen beliebigen Knoten und entfernen diesen aus dem Graphen, so finden wir ein Matching. Auf Grund der Symmetrie im Beispielsgraphenzeigen wir dies nur am Beispiel des Knotens E. Wieder sind Matching-Kanten schwarz und nicht-Matching-Kanten grau gezeichnet.

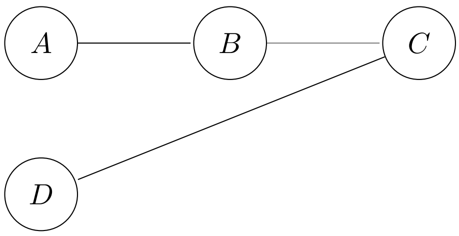

Abbildung 17: Matching in $C_5 - v$

4 Perfekte $[1, 2]$-Faktoren in Totale Dominanz Kanten-kritischen Graphen

Bei unserer Untersuchung von Kanten-kritischen Graphen haben wir uns auf 2-zusammenhängende Graphen konzentriert. Wenn G 3_tEC Graph ist, aber nicht 2-zusammenhängend, haben wir noch kein Ergebnis erhalten. Zunächst einmal werden wir sehen, dass die Bedingung im gerade bewiesenen Satz, dass G 2-zusammenhängend ist, für Graphen gerader Ordnung unerheblich ist.

Satz 4.1 *Ist $G = (V, E)$ ein 3_tEC-Graph mit gerade vielen Knoten, so enthält G ein perfektes Matching*

Beweis: Sei also $G = (V, E)$ ein 3_tEC-Graph mit gerade vielen Knoten und $S \subset V$. Falls S kein Knoten-Schnitt ist, so kann $G - S$ höchstens eine Komponente mit ungerade vielen Knoten enthalten, es gilt also $q(G - S) \leq |S|$, also besagt der Matching-Satz von Tutte, dass G in diesem Fall ein perfektes Matching besitzt. Ist S hingegen ein Knoten-Schnitt, so hat G höchstens $|S| + 1$ Komponenten. Mindestens eine dieser Komponenten muss eine gerade Knotenanzahl haben, denn sonst betrachten wir die folgende Fallunterscheidung:

1. $|S| \mod 2 = 1$: Dann hat G ungerade viele Knoten, denn $|V| \equiv |S| + (|S| + 1)1 \equiv 1 + 0 \cdot 1 \equiv 1(\mod 2)$.
2. $|S| \mod 2 = 0$: Dann hat G ungerade viele Knoten, denn $|V| \equiv |S| + (|S| + 1)1 \equiv 1 + 1 \cdot 1 \equiv 1(\mod 2)$.

Also kann $G - S$ höchstens $|S|$ viele Komponenten mit ungerade vielen Knoten besitzen. G besitzt also nach dem Matching-Satz von Tutte ein perfektes Matching. □

Die Bedingung, dass G 2-zusammenhängend ist, ist auch im Beweis von [4] nicht gebraucht worden, so dass es nicht erstaunlich ist, dass der Beweis auch für nicht 2-zusammenhängende Graphen funktioniert. Anders sieht es hingegen bei dem Beweis aus, dass 3_tEC-Graphen ungerader Ordnung faktor-kritisch sind, wenn sie 2-zusammenhängend sind. Hier wurde die Eigenschaft, 2-zusammenhängend zu sein ausgenutzt. Wir können allerdings auch für die verbleibende Klasse der nur einfach zusammenhängenden 3_tEC-Graphen ungerader Ordnung ein Ergebnis zur Faktor-Theorie gewinnen. Dafür definieren wir zunächst den Begriff Faktor und zitieren den Faktorsatz von Tutte, jeweils nach [8].

Definition 4.2 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $g, f : V \to \mathbb{N}_0$ zwei Abbildungen mit $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in V$. Ein Teilgraph $H = (V, E')$ mit $E' \subset E$ heißt Faktor. Gilt für H zudem, dass für jedes $x \in V$ die*

Bedingung $g(x) \leq d_H(x) \leq f(x)$ erfüllt ist, so nennen wir H einen (g,f)-Faktor. Ist weiterhin $g \equiv a$ und $f \equiv b$, so nennen wir H einen $[a,b]$-Faktor. Schließlich nennen wir H einen perfekten $[a,a+1]$-Faktor, wenn seine Komponenten entweder a-regulär oder $a+1$-regulär sind.

Satz 4.3 *Faktor-Satz von Tutte*
Ein Graph $G = (V,E)$ besitzt genau dann einen perfekten $[1,2]$-Faktor, wenn für alle $S \subset V$ die Bedingung $|S| \leq |N(S)|$ erfüllt ist.

Beweis: In [8] werden beide Richtungen bewiesen, wir benötigen hier aber nur die Implikation, dass $|S| \leq |N(S)|$ für alle $S \in V$ impliziert, dass G einen perfekten $[1,2]$-Faktor hat. Hierzu setzen wir $V' = \{x'_1, ..., x'_n\}$ und $V'' = \{x''_1, ..., x''_n\}$ mit $V' \cap V'' = \emptyset$ und $E' = \{\{x'_i, x''_j\} | \{x_i, x_j\} \in E\}$ und erhalten so den neuen Graphen $G' = (V' \cup V'', E')$, der offensichtlich bipartit ist. Es sei nun $S' \subset E'$ beliebig und $S = \{x_i | x'_i \in S'\}$, dann gilt $N(S') = \{x''_i | x_i \in N(S)\}$ und daher $|S'| = |S| \leq |N(S)| = |N(S')|$. Nach Lemma 2.12 besitzt G' ein perfektes Matching M'. Wir setzen nun $M = \{\{x_i, x_j\} | \{x'_i, x''_j\} \in E(M')\}$ und zeigen, dass die Komponenten von $H = (V, M)$ entweder 1- oder 2-regulär sind. Offensichtlich gilt $d_H(x_i) \in \{1,2\}$ für alle $i \in \{1,2,...,n\}$. Es bleibt also nur zu zeigen: Ist $d_H(x_i) = 1$ für ein $x_i \in V$ und $\{x_i, x_j\} \in M$, so gilt $d_H(x_j) = 1$. Es muss j, k geben, so dass $\{x'_i, x''_j\}, \{x'_k, x''_i\} \in E(M')$ gilt. Wegen $d_H(x_i) = 1$ muss $j = k$ sein und es folgt $d_H(x_j) = 1$. □
Hiermit können wir zeigen, dass 3_tEC-Graphen perfekte $[1,2] - Faktoren$ besitzen.

Satz 4.4 *Jeder 3_tEC-Graph G mit End-Knoten u besitzt einen perfekten $[1,2]$-Faktor.*

Beweis: Wir nutzen die Darstellung aus Satz 3.10. Sei also $G = (V,E)$ ein 3_tEC-Graph mit End-Knoten u, der adjazent zum Knoten v ist. Dann gilt mit $A = N(v) \setminus \{v\}$ und $B = V \setminus N[v]$, dass A eine Clique mit mindestens 2 Knoten ist, B eine Clique mit mindestens 2 Knoten ist und dass jeder Knoten in A adjazent zu $|B| - 1$ Knoten in B ist. Schließlich ist jeder Knoten in B adjazent zu mindestens einem Knoten in A. Tuttes Faktorsatz liefert, dass G einen perfekten $[1,2]$-Faktor besitzt, falls für alle $S \subset V$ gilt $|S| \leq |N(S)|$. Wir führen eine Fallunterscheidung nach Zugehörigkeit der Knoten aus A und B, sowie v und u zu S durch. Wir gehen im Folgenden immer wenn ein Knoten aus A respektive aus B in S liegt davon aus, dass mindestens zwei Knoten aus dieser Menge in S liegen. Anderenfalls funktionieren die Argumente ebenfalls, denn jeder Knoten aus A (B) trägt dann immernoch $|A| - 1 \geq 1 = |S \cap A|$ ($|B| - 1 \geq 1 = |S \cap B|$) Knoten aus A (B) zur Nachbarschaftsmenge bei.

1. Es ist nur ein Knoten in S: Da G zusammenhängend ist, gilt $|N(S)| \geq 1 = |S|$.

2. Es sind nur Knoten aus A (B) in S: Da A (B) eine Clique ist, gilt $|N(S)| \geq |A| \geq |S|$ ($|N(S)| \geq |B| \geq |S|$).

3. Nur u und Knoten aus der Menge $C \in \{A, B\}$ sind in S. Da C eine Clique ist und u zudem adjazent zu v ist, gilt $|N(S)| \geq |C| + |v| = |C| + 1 \geq |S|$.

4. Nur v und Knoten aus der Menge $C \in \{A, B\}$ sind in S. Da C eine Clique ist und v zudem adjazent zu u ist, gilt $|N(S)| \geq |C| + |u| = |C| + 1 \geq |S|$.

5. Nur Knoten aus A und aus B sind in S enthalten. Dann gilt wieder, weil A und B Cliquen sind $|N(S)| \geq |A| + |B| \geq |S|$

6. Nur Knoten aus $C \in \{A, B\}$, u und v sind in S. Da u und v adjazent sind, sind beide in $N(S)$, außerdem ist C eine Clique und somit sind alle Knoten von C in $N(S)$, also gilt $|N(S)| \geq |C| + 2 \geq |S|$.

7. Nur Knoten aus A und B, sowie u sind in S: u ist adjazent zu v, also ist $v \in N(S)$, A und B sind Cliquen, also gilt $|N(S)| \geq |A| + |B| + 1 \geq |S|$

8. Nur Knoten aus A und B, sowie v sind in S: v ist adjazent zu u, also ist $u \in N(S)$, A und B sind Cliquen, also gilt $|N(S)| \geq |A| + |B| + 1 \geq |S|$

9. Es sind u, v, Knoten aus A und Knoten aus B in S. Da u und v adjazent sind, A eine Clique und B eine Clique sind, ist $N(S) = V$ und somit gilt sicher $|N(S)| \geq |S|$

Also besitzt G tatsächlich einen perfekten $[1, 2]$-Faktor wenn G 3_tEC ist und einen End-Knoten besitzt. □

Bemerkung 4.5 *Wir können im Fall des 3_tEC-Graphen mit End-Knoten einen perfekten $[1, 2]$-Faktor auch alorithmisch leicht bestimmen. Wie wir gesehen haben, lässt sich die Knotenmenge eines solchen Graphen vollständig in zwei vollständige Teilgraphen A und B mit jeweils mindestens zwei Knoten, sowie eine Kante, die den End-Knoten u und den zugehörigen Schnittknoten v verbindet, unterteilen. Wir wählen nun die Kante $\{u, v\}$ als eine Komponente des gesuchten perfekten $[1, 2]$-Faktors und gehen in dem vollständigen Teilgraphen A (analog B) folgt vor: Wir wählen zunächst einen beliebigen Knoten a aus A, markieren ihn als besucht und wiederholen dann folgendes, so lange, bis wir jeden Knoten aus A als besucht markiert haben:*

1. *Wähle einen Knoten x aus A, der noch nicht als markiert besucht wurde. Dieser ist zu dem letzten besuchten Knoten x adjazent, da A eine Clique ist.*

2. *Markiere x als besucht.*

3. Füge $\{x, y\}$ zu dem zu konstruierenden perfekten $[1, 2]$-Faktor hinzu.

Sind alle Knoten als besucht markiert, so gibt es einen Knoten b, der als letztes als besucht markiert wurde. Füge $\{a, b\}$ zum zu konstruierenden perfekten $[1, 2]$-Faktor hinzu.
Auf diese Weise finden wir sowohl in A als auch in B jeweils einen Kreis. Zusammen mit der Kante $\{u, v\}$ ergibt dies einen perfekten $[1, 2]$-Faktor.

Nachdem wir gesehen haben, dass sich in diesem Fall der perfekte $[1, 2]$-Faktor einfach bestimmen lässt, wollen wir schließlich noch ein Beispiel zu den Sätzen dieses Kapitels angeben.

Beispiel 4.6 3_tEC***-Graph mit ungerader Anzahl an Knoten***
Der Graph im folgenden Bild hat eine ungerade Anzahl an Knoten und ist 3_tEC, wie man mittels Satz 3.9 verifizieren kann. u ist der Knoten G, v der Knoten E, F und D bilden die Menge A und die Knoten A, B und C bilden die Menge B. Insgesamt gibt es sieben Knoten, also eine ungerade Anzahl an Knoten. Ein perfekter $[1, 2]$-Faktor ist eingezeichnet, die schwarzen Kanten kennzeichnen die Kanten, die im Faktor sind und die grauen Kanten sind die übrigen Graph-Kanten. In Mengen-Notation ist der Faktor F das Paar $F = (\{A, B, C, D, E, F, G\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{D, F\}, \{E, G\}\})$. Die Knoten A, B, C bilden eine 2-reguläre Komponente, die Knoten D, F bilden eine 1-reguläre Komponente und auch die Knoten E, G bilden eine 1-reguläre Komponente. An Hand des Beispiels kann man auch gut sehen, dass dass es für 3_tEC Graphen mit End-Knoten und gerader Knotenanzahl ein perfektes Matching gibt. Ein Beispiel hierfür ergibt sich wenn man einfach den Knoten A sowohl aus dem Graphen, als auch aus dem Faktor steicht, vergleiche auch das Bild 6. Man erhält das Matching mit den Kanten $\{B, C\}, \{D, F\}$ und $\{E, G\}$.

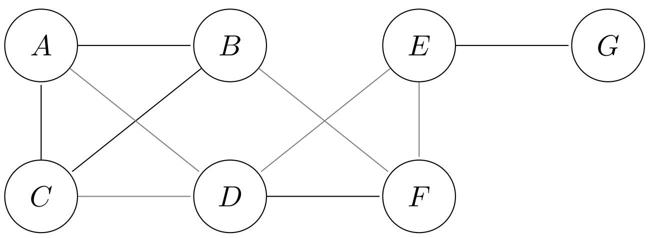

Abbildung 18: Graph mit perfektem $[1, 2]$-Faktor

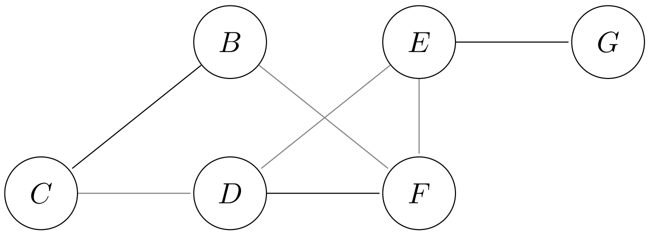

Abbildung 19: Graph mit perfektem Matching und End-Knoten

5 Perfekte Matchings und Totale Dominanz Knoten-kritische Graphen

In diesem Kapitel wollen wir den Zusammenhang zwischen perfekten Matchings und Knoten-kritischen Graphen untersuchen. Wir erinnern daran, dass ein Graph Knoten-kritisch ist, wenn die Entfernung eines beliebigen Knotens, der nicht mit einem Knoten des Grades 1 benachbart ist, die totale Dominanz-Zahl senkt. Wir bezeichnen im Folgenden mit D_v zu einem Knoten v in einem Graphen G eine $\gamma_t(G-v)$-Menge.

5.1 Grundlegende Eigenschaften von 3_tVC-Graphen

Aus der Definition Knoten-kritischer Graphen entnehmen wir folgende Aussage (die in [4] auf [3] zurückgeführt wird, dort aber nicht bewiesen und auch nicht vollständig formuliert wird)

Lemma 5.1 *Sei G ein zusammenhängender Graph mit $\delta(G) \geq 2$ (damit auch tatsächlich jeder einzelne Knoten kritisch ist). Weiterhin sei G k-γ_t-Knoten-kritisch. u, v seien verschiedene Knoten von G. Dann gilt in G:*

1. $|D_v| = k-1$
2. $N(v) \cap D_v = \emptyset$
3. $D_u \neq D_v$

Beweis: 1: Wäre $|D_v| > k-1$, so wäre v nicht kritisch und damit auch G nicht kritisch. Wäre andersherum $|D_v| < k-1$, so gäbe es also eine totale Dominanz-Menge von $G-v$, die weniger als $k-1$ Knoten enthält. Nehmen wir diese und zusätzlich einen Knoten aus $N(v)$, so erhielten wir eine totale Dominanzmenge von G mit weniger als k Knoten, was im Widerspruch dazu steht, dass G $k-\gamma_t$-kritisch ist.
2: Gäbe es einen Knoten $u \in N(v) \cap D_v$, so würde D_v auch v dominieren. Dann wäre D_v aber auch eine Dominanzmenge von G. Da nach 1 aber D_v nur $k-1$ Knoten enthält, steht das im Widerspruch dazu, dass die totale Dominanz-Zahl gleich k ist.

3: Gäbe es verschiedene Knoten u und v mit $D_u = D_v$, so würden durch D_u alle Knoten von G außer u überdeckt, u aber ebenfalls von D_u überdeckt werden, da auch alle Knoten von G außer v von D_v überdeckt würden. Insgesamt würde also ganz G von D_u überdeckt werden und es gäbe damit wiederum eine totale Dominanz-Menge, die nur $k-1$ Knoten hat. $\square$

Der folgende Satz und Beweis folgt der Darstellung in [3]. Zunächst benötigen wir aber noch die Definition der Korona.

Definition 5.2 *Die Korona eines Graphen H ist ein Graph G, der aus H entsteht, indem man für jeden Knoten v in H einen neuen Knoten u vom Grad 1 einfügt, der zu v adjazent ist. Wir schreiben $G = cor(H)$.*

Satz 5.3 *Es sei G ein Graph mit $n_G \geq 3$ und einem End-Knoten. Dann ist G $k-\gamma_t$-kritisch genau dann wenn es einen Graphen H mit k Knoten und $\delta(H) \geq 2$ gibt, für den gilt $G = cor(H)$.*

Beweis: (siehe [3])"$\Leftarrow$": Sei also $G = \mathrm{cor}(H)$ für einen zusammenhängenden Graphen H mit k Knoten und $\delta(H) \geq 2$. Dann ist H eine total dominierende Menge für G, denn jeder Knoten in H ist mit einem anderen Knoten in H verbunden und jeder Knoten in $G - H$ ist ebenfalls mit einem Knoten in H verbunden. Weiterhin ist H minimal, denn da es k isolierte Knoten gibt, muss eine total dominierende Menge mindestens k Knoten enthalten und H hat genau k Knoten. Also gilt $\gamma_t(G) = |V_H| = k$. Wir nennen nun die Menge der unterstützenden Knoten (zur Erinnerung: Das sind diejenigen Knoten, die adjazent zu einem End-Knoten, einem Knoten vom Grad 1 sind) in G $S(G)$. Wir wollen zeigen, dass G ein $k-\gamma_t$-kritischer Graph ist, wir untersuchen also einen beliebigen Knoten $u \in V_G - S(G)$ und zeigen, dass dieser Knoten kritisch ist. Da im Korona-Graphen G jeder Knoten entweder den Grad 1 hat oder ein unterstützender Knoten ist, folgern wir $d(u) = 1$. Es gibt also einen Knoten $v \in S(G)$, der adjazent zu u ist. Da H Minimal-Grad 2 hat, gilt für $H - v$ immernoch $\delta(H - v) \geq 1$. Also ist $V_H - v$ totale Dominanz-Menge von $G - u$ der Größe $k - 1$. Also ist $\gamma_t(G - u) \leq \gamma_t(G) - 1$. Da u beliebig aus $V_G - S(G)$ gewählt war, ist G tatsächlich $k - \gamma_t$-kritisch.

"$\Rightarrow$": Sei nun also G $k-\gamma_t$-kritisch und $\delta(G) = 1$. Dann gibt es einen End-Knoten v' mit einem Nachbarn v. Wir bemerken, dass jeder Knoten außer v', der adjazent zu v ist, ein unterstützender Knoten sein muss. Anderenfalls gäbe es nämlich einen Knoten $w \in N(v) - v'$, der kein unterstützender Knoten in G ist. Dann wäre aber v nicht in einer $\gamma_t(G-w)$-Menge enthalten, da diese sonst ganz G dominieren würde und das im Widerspruch dazu steht, dass G $k - \gamma_t$-kritisch ist (vergleiche obiges Lemma). Wenn aber v nicht in einer $\gamma_t(G - w)$-Menge enthalten wäre, dann wäre v' nicht total dominiert, schließlich kann v' nur von v total dominiert werden. Es gilt also tatsächlich, dass jeder Knoten in $N(v) - v'$ unterstützender Knoten ist und somit ist $G = \mathrm{cor}(H)$ für einen zusammenhängenden Graphen H mit mindestens k Knoten ist. Insbesondere gilt also $\gamma_t(G) = n_H = k$. Es bleibt zu zeigen, dass H keinen End-Knoten besitzt, um die Bedingung $\delta(H) \geq 2$ zu garantieren. Nehmen wir an, es gäbe in H einen End-Knoten v mit dem Nachbarn w. Weiterhin sei w' der End-Knoten von G (der beim Bilden des Korona-Graphen hinzugefügt wird), der adjazent zu w ist. Wir betrachten nun eine $\gamma_t(G - w')$-Menge und nennen sie S'. Dann ist $V_H - w \subset S'$. Um nun aber v zu dominieren, muss S' zudem v' oder w enthalten. Dann gölte aber $|S'| \geq n_H = \gamma_t(G)$, was im Widerspruch dazu steht, dass G kritisch ist. Also gilt schließlich auch $\delta(H) \geq 2$. □

5.2 Dreiecke in Graphen: Der Satz von Turán

Für unsere Untersuchungen der Knoten-kritischen Graphen benötigen wir zunächst eine Aussage über die Existenz von Dreiecken in Graphen mit hoher Kantenanzahl. Hierzu beweisen wir zunächst den Satz von Turán (der Beweis folgt der Darstellung in [1]) und folgern dann die für uns wichtige Aussage.

Definition 5.4

1. *Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ sind isomorph, falls es eine bijektive Abbildung φ von V nach V' und eine bijektive Abbildung ψ von E nach E' gibt, so dass für alle $e = \{v, u\} \in E$ gilt: $\psi(e) = \{\varphi(v), \varphi(u)\} \in E'$.*

2. *Ein Graph H ist ein Subgraph des Graphen $G = (V, E)$, falls es einen Subgraphen $G' = (V', E')$, $V' \subset V$, $E' \subset E$ gibt, so dass G' und H isomorph sind.*

3. *Es sei H ein Graph. Einen Graph G mit n Knoten und m Kanten, der H nicht als Subgraphen hat, heißt, wenn jeder Graph mit n Knoten und mehr als m Kanten H als Subgraphen enthält extremal mit der Eigenschaft $H \not\subset G$. Wir bezeichnen dann die Zahl m mit $ex(n, H)$. Falls H der vollständige Graph mit r Knoten ist, schreiben wir auch $ex(n, r)$.*

4. *Den vollständigen $(r-1)$-partite Graph mit $n \geq r - 1$ Knoten, der nur Partitionen der Größen $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ und $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ hat, nennen wir den Turángraphen $T^{r-1}(n)$. Seine Kantenzahl bezeichnen wir mit $t_{r-1}(n)$.*

Satz 5.5 *Satz von Turán*
Für alle $r, n \in N$ mit $r > 1$ ist jeder Graph G mit n Knoten und $ex(n, r)$ Kanten, der keine Clique der Größe r enthält, ein T^{r-1}.

Beweis: Induktion nach der Knotenanzahl n.
Induktionsanfang ($n \leq r - 1$): Dann ist G der vollständige Graph K^n und damit $T^{r-1}(n)$.
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gilt für alle Knotenanzahlen kleiner als n
Induktionsschritt ($n - 1 \rightarrow n$): G enthält einen Teilgraphen K^{r-1}, denn

sonst könnte man eine weitere Kante einfügen und es gäbe immernoch keinen K^r-Teilgraphen. Das stünde aber im Widerspruch dazu, dass G extremal mit der Eigenschaft ist, keine Clique der Größe r zu enthalten. Wir bezeichnen die Knoten aus dem K^{r-1}-Teilgraphen mit $v_1, ..., v_{r-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $G - K$ höchstens $t_{r-1}(n-(r-1))$ Kanten hat. Weiterhin hat jeder Knoten aus $G-K$ höchstens $r-2$ Nachbarn in K, da es sonst eine Clique mit r Knoten in G gäbe. Daher gilt

$$m(G) \leq t_{r-1}(n-r+1) + (n-r+1)(r-2) + \binom{r-1}{2}$$

Dass dieser Ausdruck auf der anderen Seite genau $t_{r-1}(n)$ ist, sieht man ein, wenn man den Turángraphen $T^{r-1}(n)$ betrachtet. Im Turángraphen wählen wir aus jeder Partition einen Knoten aus. Zusammen bilden diese eine $r-1$ Clique Q, die somit $\binom{r-1}{2}$ Kanten enthält. Jeder Knoten, der nicht in Q ist, ist mit den Knoten aus Q, die in den übrigen $r-2$ Partitionen liegen verbunden, dies trägt $n-(r-1) = n-r+1$ Mal $r-2$ Kanten zur Summe bei. Schließlich ist $G-Q$ ein Turángraph mit $n-(r-1) = n-r+1$ Knoten. Dieser hat per Definition $t_{r-1}(n-r+1)$ Knoten. Nun ist G extremal ohne r-Clique und auch $T^{r-1}(n)$ enthält offenbar keine r-Clique. Demnach gilt in obiger Ungleichung sogar Gleichheit. Daraus folgt, dass jeder Knoten in $G-K$ nicht nur höchstens, sondern genau $r-2$ Nachbarn in K hat. Zu x_i definieren wir die Menge V_i aller Knoten von G, deren $r-2$ Nachbarn in K genau die Knoten außer x_i sind:

$$V_i := \{v \in V | \{v, x_i\} \in E \Leftrightarrow i \neq j\}$$

Bei den V_i handelt es sich jeweils um unabhängige Knotenmengen, denn gäbe es eine Kante in V_i, so gäbe es eine Clique bestehend aus den zwei verbundenen Knoten aus V_i und allen Knoten aus $G-K$ außer x_i. Weiterhin partitionieren die Mengen V_i die Knotenmenge V von G. Demnach ist G $(r-1)$-partit und da $T^{r-1}(n)$ von allen $(r-1)$-partiten Graphen derjenige mit den meisten Kanten ist, muss $G = T^{r-1}(n)$ gelten und somit die Behauptung.
□

Folgerung 5.6 *Jeder Graph mit $n \geq 3$ Knoten und mindestens $\lceil n^2/4 \rceil + 1$ Kanten enthält einen Kreis der Länge 3 (kurz Dreieck) und der einzige Graph mit n Knoten und $\lfloor n^2/4 \rfloor$ Kanten, der kein Dreieck enthält, ist der vollständige bipartite Graph $K_{\lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor}$.*

Beweis: Wir setzen im Satz von Turán $r = 3$, dann erhalten wir die Aussage, dass der Graph $T^2(n)$ der einzige extremale Graph mit n Knoten und ohne Clique der Größe 3 ist. Der $T^2(n)$ ist aber der vollständige bipartite Graph $K_{\lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor}$, es folgt also, dass jeder Graph mit n Knoten, der mehr Kanten enthält als T^2, einen Kreis der Länge 3 enthält. Weiterhin folgt, dass jeder

Graph, der gleich viele Knoten und Kanten wie T^2 enthält, aber nicht isomorph zu T^2 ist, einen Kreis der Länge drei enthält. Da T^2 schließlich

$$\lceil n/2 \rceil \cdot \lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n^2/4 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ (n-1)/2(n+1)/2 & \text{, falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Kanten enthält und

$$(n-1)/2(n+1)/2 = n^2/4 - n/4 + n/4 - 1/4 = \lfloor n^2/4 \rfloor$$

für ungerade n richtig ist, folgt die Aussage. □

5.3 Charakterisierung von 3_tVC-Graphen

Bevor wir zur Hauptaussage dieses Kapitels gelangen, benötigen wir schließlich noch drei weitere Lemmata, deren Aussagen und Beweise wieder [4] folgen. Wir erinnern hierzu daran, dass D_v eine total dominierende Menge für $G - v$ bezeichnet.

Lemma 5.7 *Es sei $G = (V, E)$ ein 3_tVC Graph mit $\delta(G) \geq 2$, also ohne End-Knoten, und $X \subset V$ eine nichtleere Untermenge der Knoten von G. Falls für die Zahl der Komponenten mit ungerade Knotenanzahl $q(G - X)$ gilt $q(G - X) > |X|$, dann gelten für G:*

1. $|D_v \cap X| \geq 1$ *für jeden Knoten* $v \in V$
2. $D_v \subset X$ *für einen Knoten* $v \in V - X$.
3. $\frac{1}{2}|X| \leq \Delta(G_X) \leq |X| - 2$
4. $|X| \geq 5$

Beweis: Sei also $G = (V, E)$ ein 3_tVC Graph mit n Knoten und $\delta(G) \geq 2$. Weiterhin sei eine nicht-leere Teilemenge $X \subset V$ so gewählt, dass $q(G-X) > |X|$ richtig ist. G muss zusammenhängend sein, denn für jede Komponente bedarf es jedenfalls zwei Knoten, um die Komponente total zu dominieren. Es gilt aber $\gamma_t(G) = 3$ und schon zwei Komponenten können mit drei Knoten nicht total dominiert werden. Weiterhin stellen wir fest, dass $|X| > 1$ sein muss, da G sonst einen Schnitt-Knoten hätte. Jede Komponente von $G - v$ enthält, wieder wegen $\delta(G) \geq 2$ mindestens zwei Knoten und so wäre $\gamma_t(G - v) \geq 4$, was im Widerspruch dazu steht, dass G ein 3_tVC Graph ist. G ist also 2-zusammenhängend und $r := |X| \geq 2$. Wir bezeichnen im Verlauf dieses Beweises $q(G - X)$ mit t und setzen voraus, dass $t \geq r + 1 \geq 3$, da $q(G - X) > |X|$ sein soll.
Wir schreiben $X = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ und bezeichnen mit $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), ..., G_t = (V_t, E_t)$ die Komponenten mit ungerader Knotenanzahl von $G - X$. Weiterhin kürzen wir ab $V_{\leq i} = \cup_{j=1}^{i} V_j$ und $V_{\geq i} = \cup_{j=i}^{t} V_j$. Schließlich

bezeichnen wir mit $Y = V_{\geq 1}$ die Menge aller Knoten, die in einer Komponente mit ungerade vielen Knoten liegen und mit $Z = V \setminus (X \cup Y)$ die Menge aller Knoten, die in einer Komponente mit gerade vielen Knoten liegen. Mit dieser Vorbereitung können wir jetzt die vier Aussagen beweisen.

1. Wenn $D_v \cap X = \emptyset$ für einen Knoten $v \in V$ gölte, dann könnte D_v, das aus zwei adjazenten Knoten besteht, da G 3_tVC ist, $Y \setminus \{v\}$ nicht dominieren. Da D_v aber jeden Knoten aus G außer v dominieren muss, stellt das einen Widerspruch dar.

2. Wir zeigen auch diese Teilaussage mittels eines Widerspruchsbeweises. Wir nehmen also an, dass D_v nicht in X enthalten ist für alle Knoten $v \in V \setminus X$. Dann ist also $|D_v \cap X| \leq 1$, da $|D_v| = 2$ gilt. Nach Teil (1) gilt dann sogar $|D_v \cap X| = 1$. Es sei nun $v_1 \in V_1$. Wir nehmen an, dass $D_{v_1} \cap X = \{x_1\}$ gilt, gegebenenfalls müssen wir dazu die Nummerierung der x_i ändern. Nun gibt es einen zu x_1 adjazenten Knoten y_1 so dass $D_{v_1} = \{x_1, y_1\}$ richtig ist. Gegebenenfalls nach Umbenennung der Komponenten können wir annehmen, dass $y_1 \in V_{\leq 2} \cup Z$ liegt. Falls $y_1 \notin V_2$, muss x_1 $V_{\geq 2}$ dominieren. Anderenfalls, wenn $y_1 \in V_2$ gilt, dominiert x_1 ebenfalls einen Knoten aus V_2, eben y_1 und zusätzlich gilt $x_1 \succ V_{\geq 3}$. In jedem Fall gibt es also einen Knoten $v_2 \in V_2$, so dass $x_1 \succ V_{\geq 3} \cup \{v_2\}$ gilt.
   Da $\{v_2, x_1\} \in E$, muss nach Lemma 5.1 Teil 2 $x_1 \notin D_{v_2}$ sein, da anderenfalls D_{v_2} ganz G dominieren würde. Wir können wieder annehmen (gegebenenfalls indem wir die Nummerierung der Knoten aus $X \setminus \{x_1\}$ ändern), dass $D_{v_2} \cap X = \{x_2\}$. Es sei nun $D_{v_2} = \{x_2, y_2\}$ und die Nummerierung der Komponenten $G_3, ..., G_t$ so angepasst, dass $y_2 \in V_{\leq 3} \cup Z$. Genau wie im ersten Schritt unterscheiden wir ob $y_2 \notin V_3$ - dann dominiert x_2 die Menge $V_{\geq 3}$ - oder $y_2 \in V_3$ richtig ist. In diesem Fall gilt $x_2 \succ V_{\geq 4}$ und x_2 ist zu einem Knoten aus V_3 - eben y_2 - adjazent. Wir folgern wieder, das es einen Knoten $v_3 \in V_3$ gibt, so dass $x_2 \succ V_{\geq 4} \cup \{v_2\}$.
   Dieses Vorgehen iterieren wir nun für $i = 3..r$ und erhalten

   - eine Nummerierung der Knoten $x_i \in D_{v_i} \cap X$
   - eine Nummerierung der Komponenten G_{i+1}
   - einen Knoten $v_{i+1} \in V_{i+1}$

   so dass $x_i \succ V_{\geq i+2} \cup \{v_{i+1}\}$ gilt. Dann gilt aber, dass v_{r+1} ganz X dominiert, denn jeder einzelne Knoten x_j dominiert v_{r+1}. Dann würde aber gelten $D_{v_{r+1}} \cap X \neq \emptyset$, was im Widerspruch zu Lemma 5.1 Teil 2 steht.

3. Angenommen der linke Teil der Ungleichung wäre falsch und es gölte $|X|/2 > \Delta(G_X)$, dann kann es keine zwei Knoten in X geben, die

ganz X dominieren. Dann muss aber $|D_v \cup X| \leq 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus X$ gelten, was Aussage 2 widerspräche. Also gilt der linke Teil der Aussage und $\frac{1}{2}|X| \leq \Delta(G_X)$. Der zweite Teil der Ungleichung, $\Delta(G_X) \leq |X| - 2$ lässt sich ebenfalls per Widerspruch beweisen. Gölte diese Aussage nicht, so müsste gelten $\Delta(G_X) = |X| - 1$, es gäbe also einen Knoten $x \in X$, so dass $X \setminus \{x\} \subseteq N(x)$. Dann muss aber gelten $D_x \cap X = \emptyset$, denn wenn ein Knoten $y \in X$ in D_x wäre, so würde D_x sogar ganz G total dominieren, denn y wäre adjazent zu x. Das steht aber im Widerspruch zu Teil 1 dieses Lemmas, also gilt auch der zweite Teil der Ungleichung.

4. Nach Teil 2 wissen wir, dass $|X| \geq 2$ gelten muss, denn $|D_v| = 2$ für alle $v \in V$. Wenn $|X| = 2$ wäre, dann müsste nach Teil 3 gelten $\Delta(G_X) \leq 2 - 2 = 0$, G_X bestünde also aus zwei isolierten Knoten. Zusammen mit Teil 2 würde dann aber gelten, dass zwei nicht adjazente Knoten eine totale Dominanzmenge für D_v wären, was allerdings nicht möglich ist, weil die beiden Knoten selbst dann nicht dominiert wären. Also gilt sogar $|X| \geq 3$. Auch $|X| = 3$ ist allerdings nach Teil 3 dieses Satzes unmöglich, denn dann müsste gelten $\frac{1}{2}|X| = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5 \leq \Delta(G_X)$, also $2 \leq \Delta(G_X)$, da $\Delta(G_X)$ eine ganze Zahl sein muss. Nach dem rechten Teil der Ungleichung aus Teil 3 gilt dann also $2 \leq |X| - 2$ also $4 \leq |X|$, was einen Widerspruch zu $|X| = 3$ darstellt. Also gilt auch $|X| \geq 4$.
Um schließlich die gewünschte Ungleichung $|X| \geq 5$ zu beweisen, nehmen wir wieder das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch. Uns bleibt hier nur noch die Option, dass $|X| = 4$ sein könnte. Dann wären $r = 4$ und $t \geq 5$. Nach Teil 2 wissen wir, dass es einen Knoten $v \in Y$ gibt, so dass $D_v \subset X$ richtig ist. Gegebenenfalls nach Vertauschen der Nummerierung können wir davon ausgehen, dass $D_v = \{x_2, x_3\}$ richtig ist. Also muss $\{x_2, x_3\} \in E$ sein. Da x_2 und x_3 ganz $G - v$ dominieren, müssen x_1 und x_4 adjazent zu x_2 oder x_3 sein. Sie können allerdings nicht beide adjazent zu x_2 sein, denn sonst wäre $\Delta(G_X) = 3 > 4 - 2$, was im Widerspruch zu Teil 3 stünde. Analog können nicht beide adjazent zu x_3 sein, also können wir davon ausgehen, dass (gegebenenfalls nach Vertauschen der Rollen von x_1 und x_4) G_X entweder der Weg (x_1, x_2, x_3, x_4) oder der Kreis $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$ ist.
Da nach Teil 1 $D_v \cap X \neq \emptyset$ ist und in D_v kein Nachbar von v enthalten sein darf (Lemma 5.1), gilt $D_{x_3} \cap X = \{x_1\}$ und $D_{x_2} \cap X = \{x_4\}$. Seien nun y_1 und y_4 so gegeben, dass $D_{x_3} = \{x_1, y_1\}$ und $D_{x_2} = \{x_4, y_4\}$ richtig sind. Nach eventueller Umbenennung der Komponenten können wir davon ausgehen, dass $y_1 \in V_t \cup Z$ liegt und somit $x_1 \succ V_{\leq t-1} \cup \{v_1\}$ gilt. Nach eventueller weiterer Umordnung der Komponenten $G_1, G_2, ..., G_{t-1}$ können wir außerdem annehmen, dass $y_4 \in V_{\geq t-1} \cup Z$ richtig ist. Wie wir weiter oben festgehalten haben, ist

die Zahl der ungeraden Komponenten von $G - X$ $t \geq 5$. Falls $y_4 \notin V_4$ gilt müssen $x_1 \succ V_{\leq 4}$ und $x_4 \succ V_{\leq 4}$ gelten, anderenfalls, wenn $y_4 \in V_4$, muss zumindest $x_4 \succ V_{\leq 3} \cup \{y_4\}$ und $x_1 \succ V_{\leq 4}$ gelten. In beiden Fällen gibt es einen Knoten $v_4 \in V_4$, so dass $x_1 \succ V_{\leq 4}$ und $x_4 \succ V_{\leq 3} \cup \{v_4\}$ richtig sind.
Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor nach der Menge D_{v_4}. Da nach obiger Überlegung v_4 adjazent sowohl zu x_1 als auch zu x_4 ist, kann D_{v_4} nur noch zu x_2 oder x_3 aus X adjazent sein, vgl. Lemma 5.1. Nach dem bereits bewiesenen Teil 1 dieses Lemmas kann $D_{v_4} \cap X$ nicht leer sein, also ist $D_{v_4} \cap X = \{x_2, x_3\}$, oder aber $D_{v_4} \cap X = \{x_i\}$ mit $i \in \{2, 3\}$. Gegebenenfalls nach vertauschen der Rollen von x_2 und x_3 können wir den zweiten Fall einschränken auf $D_{v_4} \cap X = \{x_2\}$. Wir untersuchen nun die beiden möglichen Fälle und führen beide zum Widerspruch.

(a) $D_{v_4} = \{x_2, x_3\}$: Da $v_4 \in V_4$, müssen dann x_2 und x_3 $V_{\leq 3}$ dominieren, insbesondere gilt also auch $\{x_2, x_3\} \succ V_1$. Wir betrachten ein beliebiges $v_1 \in V_1$. Dieses muss adjazent zu x_2 oder x_3 sein, o.B.d.A. zu x_2. Dann gilt $\{x_1, x_2, x_4\} \subseteq N(v_1)$. Also gilt nach Lemma 5.1 und Teil 1 dieses Lemmas $D_{v_1} \cap X = \{x_3\}$. Gegebenenfalls nach Vertauschung der Nummerierung von G_2 und G_3 können wir annehmen, dass es einen Knoten $v_2 \in V_2$ gibt, so dass $x_3 \succ V_3 \cup \{v_2\}$. Zunächst einmal muss $x_3 \succ G_2$ oder $x_3 \succ G_3$ richtig sein, denn der zweite Knoten der Dominanzmenge D_{v_1} muss aus einer der Komponenten stammen, also muss x_3 die übrigen Komponenten dominieren. Dass es zudem einen solchen Knoten v_2 gibt, der ebenfalls von x_3 dominiert wird, liegt daran, dass entweder ein Knoten aus V_2 Teil von D_{v_1} ist (dann müssen die beiden Knoten in der Dominanzmenge adjazent sein), oder aber der zweite Knoten der Dominanzmenge nicht in V_2 liegt, dann muss sogar ganz V_2 von x_3 dominiert werden und wir können uns einfach einen Knoten in V_2 als v_2 aussuchen. Dann gilt also $\{x_1, x_3, x_4\} \subseteq N(v_2)$ und es muss gelten $D_{v_2} \cap X = \{x_2\}$. Dann muss es aber einen Knoten $v_3 \in V_3$ geben, der adjazent zu x_2 ist. Entweder ist v_3 selbst Teil von D_{v_2}, oder aber der zweite Knoten von D_{v_2} stammt aus einer anderen Zusammenhangskomponente von $G - X$ und x_2 dominiert sogar ganz V_3. In jedem Fall gilt aber dass $v_3 \succ X$ und somit $D_{v_3} \cap X = \emptyset$ nach Lemma 5.1 Teil 2. Das ist aber ein Widerspruch zu Teil 1 dieses Lemmas. Also kann D_{v_4} nicht gleich $\{x_2, x_3\}$ sein.

(b) $D_{v_4} \cap X = \{x_2\}$: Dann muss x_2 zumindest zwei der Komponenten G_1, G_2, G_3 dominieren, denn der zweite Knoten in D_{v_4} stammt aus einer der Komponenten von $G - X$, und kann entsprechend die anderen Komponenten nicht dominieren. Gegebenenfalls nach Vertauschen der Nummerierung der Komponenten können wir annehmen, dass $x_2 \succ V_{\leq 2}$ gilt. Es sei nun $v_1 \in V_1$. Da $\{x_1, x_2, x_4\} \subseteq N(v_1)$, muss gelten $D_{v_1} \cap X = \{x_3\}$ nach Lemma 5.1 und Teil 1 dieses Lemmas. Mit der gleichen Argumentation wie in Fall (a) muss es einen Knoten $v_2 \in V_2$ geben, der adjazent zu x_3 ist (entweder der zweite Knoten aus D_{v_1} oder sogar ein beliebiger Knoten aus V_1). Dann würde aber wiederum $v_2 \succ X$ gelten und nach Lemma 5.1 wieder $D_{v_2} \cap X = \emptyset$, was im Widerspruch zu Teil 1 dieses Lemmas steht. Demnach ist auch der zweite Fall nicht möglich.

Also ist auch Teil 4 gezeigt.

□

Lemma 5.8 *Es sei $G = (V, E)$ ein 3_tVC Graph, der keinen Subgraphen $K_{1,6}$ besitzt, zu dem es also keinen Subgraphen gibt, der der vollständige bipartite Graph mit einer ein-elementigen und einer sechs-elementigen Partition ist. Weiter sei $X \subseteq V$ eine nicht-leere Teilmenge der Knoten von G und $\delta(G) \geq 2$. Falls $q(G - X) > |X|$ richtig ist, hat G die folgenden Eigenschaften:*

1. $\Delta(G_X) \leq |X| - 3$
2. $D_v \subseteq X$ *für alle Knoten* $v \in V$
3. $|X| = 8$, $q(G - X) = 9$ *und* $|V|$ *ist ungerade.*
4. *Es gibt keine Komponenten mit gerade vielen Knoten in* $G - X$.

Beweis: Sei also $G = (V, E)$ ein 3_tVC-Graph mit n Knoten und ohne $K_{1,6}$-Subgraphen, sowie $\delta(G) \geq 2$. Weiter sei $\emptyset \neq X \subseteq V$, mit $q(G - X) > |X|$. G muss zusammenhängend sein, weil $\gamma_t(G) = 3$ gilt. Zudem kann G keinen Schnitt-Knoten v enthalten, da sonst $\gamma_t(G - v) \geq 4$ richtig wäre, was im Widerspruch dazu steht, dass G 3_tVC ist. Also ist G 2-zusammenhängend und $|X| \geq 2$. Wir schreiben wieder $|X| = r$ und $q(G - X) = t$. Nach dem gerade bewiesenen Lemma muss dann gelten $r \geq 5$ und $t \geq r + 1 \geq 6$. Weiterhin bezeichne Y die Menge aller Knoten, die zu einer Komponente von $G - X$ mit ungerader Knotenanzahl gehören.

1. Wir wählen $x \in X$ beliebig und betrachten die Menge D_x. Nach dem ersten Teil des gerade bewiesenen Lemmas muss $|D_x \cap X| \geq 1$ gelten. Wir unterscheiden nun die zwei möglichen Fälle für $|D_X \cap X|$:

   (a) $|D_x \cap X| = 1$: Dann muss der Knoten v in $D_x \cap X$ adjazent sein zu jeweils mindestens einem Knoten je Komponente von $G - X$, derer es insgesamt $t \geq 6$ gibt. Diese t Knoten zusammen mit v ergeben einen $K_{1,t}$-Subgraphen, also mindestens einen $K_{1,6}$-Subgraphen. Das steht im Widerspruch dazu, dass G $K_{1,6}$-frei ist.

(b) $|D_x \cap X| = 2$: Es muss gelten $N(x) \cap D_x = \emptyset$ nach Lemma 5.1, also $d_X(x) \leq |X \setminus (D_x \cup \{x\})| = |X| - 3$, da x weder zu sich, noch zu den zwei Knoten aus D_x adjazent ist. Also gilt $\Delta(G_X) = \max_{x \in X} d_X(x) \leq |X| - 3$.

2. Lemma 5.1, Teil 3, liefert $|X|/2 \leq \Delta(G_X)$. Nach Teil 1 dieses Lemmas gilt zudem $\Delta(G_X) \leq |X| - 3$. Einsetzen von $|X| = 1, 2, ..., 5$ ergibt jeweils, dass kein einziger Wert für $\Delta(G_X)$ zulässig wäre, also muss gelten $|X| \geq 6$. Weiterhin gilt $t \geq |X| + 1 \geq 7$. Falls es nun einen Knoten $v \in V$ gäbe, so dass $|D_v \cap X| = 1$ gölte, so gäbe es in $G - X - v$ zumindest noch 6 Komponenten. Der Knoten in $D_v \cap X$ müsste zu mindestens einem Knoten einer jeden Komponente adjazent sein, was wieder einen $K_{1,6}$ ergäbe, ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass G $K_{1,6}$-frei ist. Also muss $|D_v \cap X| = 2$ für jeden Knoten $v \in V$ gelten.

3. Wir zeigen zunächst $|X| \geq 8$: Sei $v \in V$ und $D_v = \{v_1, v_2\}$. Nach dem gerade bewiesenen Teil 2 ist $D_v \subseteq X$ und nach Lemma 5.1, Teil 2, dominiert $\{v_1, v_2\}$ alle Knoten in G außer v und dominiert gleichzeitig v ausdrücklich nicht (sonst gäbe es auch eine totale Dominanzmenge mit 2 Knoten). Da weiterhin $D_u \neq D_v$, nach Lemma 5.1, Teil 3, für alle $u \in V$ mit $u \neq v$ richtig ist, können wir jedem Knoten v eine Kante $\{v_1, v_2\}$ aus G_X eindeutig zuordnen. Also muss es in G_X mindestens so viele Kanten geben, wie es in G Knoten gibt. Da $q(G - X) > |X|$ richtig ist, muss es mindestens $|X| + 1$ Komponenten mit mindestens einem Knoten in $G - X$ geben. Also muss gelten $n \leq |X| + |X| + 1 = 2|X| + 1$. Da jeder Knoten x in X maximal den Grad $d_X(x) = \Delta(G_X)$ haben darf und dieser Ausdruck nach Teil 1 wieder beschränkt ist durch $|X| - 3$, muss also gelten: $2|X| + 1 \leq |E_X| \leq \frac{1}{2}|X|(|X| - 3)$. Einsetzen von $|X| = 1, 2, ..., 7$ ergibt jeweils einen Widerspruch, also muss $|X| \geq 8$ richtig sein.
Wir zeigen nun umgekehrt, dass auch $|X| \leq 8$ gilt. Sei dazu $x \in X$ beliebig und $D_x = \{x_1, x_2\}$. Abermals nach Teil 2 dieses Satzes wissen wir, dass $D_x \subseteq X$, insbesondere gilt auch $D_x \succ_t Y$. Da G $K_{1,6}$-frei ist, kann jeder einzelne Knoten in X maximal Knoten von fünf verschiedenen Komponenten von $G - X$ dominieren, also D_x maximal zehn Komponenten von $G - X$ dominieren. Also muss $t \leq 10$ richtig sein. Nehmen wir an, dass $t = 10$ gilt. Dann müsste sowohl x_1 als auch x_2 jeweils genau fünf ungerade Komponenten von $G - X$ dominieren. Es seien nun Y_1 all die Knoten aus Y die von x_1 dominiert werden und Y_2 diejenigen Knoten aus Y, die von x_2 dominiert werden. Da $\{x_1, x_2\} \succ Y$, gilt $Y = Y_1 \cup Y_2$ und $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Wir wählen nun aus jeder Komponente von Y_1 einen Knoten aus, die fünf ausgewählten Knoten fassen wir zusammen in der Menge Y_1'. Dann bildet aber $G_{D_x \cup Y_1'}$ einen $K_{1,6}$, denn kein Knoten aus Y_1' ist adjazent zu x_2, aber x_2 ist

adjazent zu x_1, genau wie alle Knoten aus Y_1'. Insgesamt gibt es in diesem Graphen also 6 Knoten, die eine unabhängige Menge bilden, aber alle zu x_1 adjazent sind. Ein Widerspruch zu der Annahme, dass G $K_{1,6}$-frei ist. Also muss $t \leq 9$ gelten. Da aber $t \geq r+1$, muss $r \leq 8$ gelten. Zusammen mit dem Beweis, dass $|X| = r \geq 8$ richtig ist, gilt also $r = 8$ und $t = 9$. Schließlich muss dann aber n ungerade sein, denn wie schon einige Male zuvor gezeigt muss $|X| \equiv q(G-X) (\mod 2)$ sein.

4. Angenommen es gäbe eine gerade Komponente in $G - X$. Da wir aus Teil 3 bereits wissen, dass $q(G - X) = 9$ gilt, muss es in $G - X$ mindestens 10 Komponenten geben. Wir haben in Teil 3 aber bereits gezeigt, dass es dann einen $K_{1,6}$ in G geben muss, bestehend aus jeweils einem Knoten je Komponente, die zu einem Knoten einer Menge D_v adjazent ist, sowie den beiden Knoten aus dem zugehörigen D_v.

□

Lemma 5.9 *Es sei $G = (V, E)$ ein 3_tVC-Graph mit gerade vielen Knoten und $\delta(G) \geq 2$, der $K_{1,7}$ nicht als Subgraphen enthält. Weiter sei $X \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge der Knoten von G. Gilt weiter $q(G - X) \geq |X|$, dann hat G die folgenden Eigenschaften.*

1. $\Delta(G_X) \leq |X| - 3$
2. $D_v \subseteq X$ *für alle Knoten* $v \in V$.
3. $8 \leq |X| \leq 9$ *und* $q(G - X) \leq 11$.

Beweis: Es sei $G = (V, E)$ ein 3_tVC-Graph mit gerade vielen Knoten und ohne $K_{1,7}$. Weiterhin gelte $\delta(G) \geq 2$. Da $\gamma_t(G) = 3$, muss G zusammenhängend sein, also ist $q(G) = 0$. Es sei nun $X \subseteq V$ eine (offensichtlich nicht-leere) Teilmenge der Knoten von G, so dass $q(G-X) > |X|$. Da n gerade ist, muss gelten $q(G - X) \geq |X| + 2$. Weiterhin kann G keinen Schnitt-Knoten v enthalten, sonst hätte $G - v$ zwei Komponenten und damit wäre $\gamma_t(G - v) \geq 4$, was im Widerspruch dazu steht, dass G Knoten-kritisch mit $\gamma_t(G) = 3$ ist. Also ist G 2-zusammenhängend und $|X| \geq 2$. Wir schreiben wieder $|X| = r$ und $q(G - X) = t$. Lemma 5.7 liefert $r \geq 5$ und damit $t \geq r + 2 \geq 7$. Wir nennen außerdem wieder Y die Menge aller Knoten in Komponenten mit ungerader Knotenanzahl von $G - X$.

1. Es sei $x \in X$ beliebig. Wir unterscheiden nach der Zahl $|D_x \cap X|$, die nur 1 oder 2 sein kann (Lemma 5.7).
   $|D_x \cap X| = 1$: Dann finden wir einen $K_{1,t}$, wenn wir den Knoten v in $D_x \cap X$ als eine Partition wählen, sowie aus jeder Komponente von $G-X$, aus der der andere Knoten u von D_x nicht stammt jeweils einen Knoten, der zu v adjazent ist und zusammen mit u als zweite Partition

wählen. Da aber $t \geq 7$, stellt das einen Widerspruch dazu dar, dass G $K_{1,7}$ frei ist.
$|D_x \cap X| = 2$: Es muss nach Lemma 5.1 gelten $N(x) \cap D_x = \emptyset$, also $d_X(x) \leq |X \setminus (D_x \cup \{x\}| = |X| - 3$. Also gilt $\Delta(G_X) \leq |X| - 3$

2. Nach Lemma 5.7, Teil 2, gilt $|X|/2 \leq \Delta(G_X)$. Nach Teil 1 dieses Lemmas ist zudem $\Delta(G_X) \leq |X| - 3$. Da alle Werte für $|X| = 1, 2, ..., 5$ einen Widerspruch ergeben, wenn man sie in diese beiden Ungleichungen einsetzt, muss $|X| \geq 6$ gelten. Weiterhin ist $t \geq r + 2 \geq 8$. Wäre nun $|D_v \cap X| = 1$ für einen Knoten $v \in V$, dann bildet der Knoten in $D_v \cap X$ zusammen mit jeweils einem Knoten je Komponente aus der v nicht stammt einen $K_{1,t-1}$ mit $t - 1 \geq 7$. Das steht aber im Widerspruch dazu, dass G $K_{1,7}$-frei ist. Also gilt $|D_v \cap X| = 2$ für jeden Knoten $v \in V$.

3. Wir können wieder wie im Beweis von Lemma 5.8 jedem Knoten $v \in V$ eine eindeutige Kante aus G_X zuordnen, da $G - v$ jeweils von einer Kante dominiert wird, wir aus Teil 2 wissen, dass die Kante komplett in X liegen muss und dass keine Kante zwei solche Mengen dominieren kann, weil die Dominanzzahl von G 3 ist. Da $G - X$ wiederum mindestens $|X| + 2$ Komponenten hat, muss $n \geq 2|X| + 2$ sein und daher auch $2|X| + 2 \leq |E_{G_X}|$. Weiterhin kann jeder Knoten v in X maximal den Grad $d_X(c) = \Delta(G_X)$ haben, also gilt auch $|E(G_X)| \leq \frac{1}{2}|X|(|X| - 3)$. Einsetzen der kleineren Werte für $|X|$ ergibt nun wieder einen Widerspruch, wir erhalten also $|X| \geq 8$.
Bleibt zu zeigen, dass auch $|X| \leq 9$ richtig ist. Hierzu sei $x \in X$ beliebig und $D_x = \{x_1, x_2\} \subseteq X$. Insbesondere muss gelten $D_x \succ_t Y$. Da G $K_{1,7}$-frei ist, kann jeder Knoten in X höchstens Knoten aus sechs verschiedenen Komponenten von $G - X$ dominieren und damit D_x höchstens zwölf Komponenten. Wäre aber $t = 12$, so würden x_1 und x_2 keine gemeinsamen Komponenten dominieren. Wählt man x_1 als eine Partition und x_2 zusammen mit einem Knoten je Komponente, die x_1 dominiert, als zweite Partition, so erhielte man wieder einen $K_{1,7}$. Also muss $t \leq 11$ gelten. Da nun aber $11 \geq t \geq r + 2$ gilt, muss auch $r \leq 9$ gelten. Also gilt insgesamt $|X| \in \{8, 9\}$ wie behauptet.

□

5.4 Matchings in 3_tVC-Graphen

Mit dieser Vorbereitung können wir, weiterhin [4] folgend, das Hauptergebnis dieses Kapitels formulieren und beweisen.

Satz 5.10 *Es sei G ein 3_tVC-Graph mit $\delta(G) \geq 2$. Dann gilt*

1. *Falls G ungerade viele Knoten hat und $K_{1,6}$ nicht als Teilgraphen besitzt, ist G faktor-kritisch.*

2. *Falls G gerade viele Knoten hat und $K_{1,7}$ nicht als Teilgraphen besitzt, gibt es ein perfektes Matching in G.*

Beweis:

1. Es sei $G = (V, E)$ ein 3_tVC-Graph mit ungerade vielen Knoten n, $\delta(G) \geq 2$ und ohne $K_{1,6}$-Teilgraphen. Da $\gamma_t(G) = 3$, muss G zusammenhängend sein, es gilt also $q(G) = 1$. Weiterhin kann G keinen Schnitt-Knoten v haben, da sonst $\gamma_t(G - v) \geq 4$ wäre, was im Widerspruch dazu steht, dass G 3_tVC ist. Also ist G 2-zusammenhängend. Wir zeigen die Behauptung wieder mittels eines Widerspruchsbeweises und nehmen an, G sei nicht faktor-kritisch. Dann existiert nach dem Satz über faktor-kritische Graphen eine nicht-leere Teilmenge $X \subseteq V$, so dass $q(G - X) \geq |X|$. Da G ungerade viele Knoten hat, muss sogar gelten $q(G - X) \geq |X| + 1$, denn $|X|$ und $q(G - X)$ können nicht beide gerade oder beide ungerade sein, sonst wäre die Gesamtzahl der Knoten gerade. Nach Lemma 5.8 sind $|X| = 8$ und $q(G - X) = 9$. Weiterhin hat $G - X$ keine Komponente mit gerade vielen Knoten. Wir nennen die Menge aller Knoten in ungeraden Komponenten von $G - X$ wieder $Y = V \setminus X$.
   Wir betrachten die Kanten von G_X und erinnern uns, dass wir nach dem Beweis von Lemma 5.8, Teil 3, jedem Knoten $v \in V$ eine Kante e_v eindeutig zuordnen können, so dass $e_v \succ_t V \setminus \{v\}$. Ist $v \in X$, so kann e_v X nicht total dominieren, da sonst auch v total dominiert würde, was im Widerspruch dazu stünde, dass $\gamma_t(G) = 3$ gilt. Auf der anderen Seite muss eine solche Kante sicherlich ganz Y total dominieren, da sie ja ganz $V \setminus \{v\}$ dominiert. Solche Kanten nennen wir Y-Kanten. Weiterhin halten wir fest, dass für Knoten $v \in Y$ die Kante e_v ganz X total dominiert und zudem $Y \setminus \{v\}$ total dominiert. Solche Kanten nennen wir X-Kanten und halten fest, dass die Menge der X-Kanten und der Y-Kanten disjunkt sind, da eine Kanten, die sowohl X- als auch Y-Kante wäre, ganz G dominieren würde. Kanten, die X-Kante oder Y-Kante sind, nennen wir gute Kanten und alle Kanten, die weder X- noch Y-Kanten sind, nennen wir schlechte Kanten. Jeder einzelne Knoten in Y hat eine zugehörige X-Kante und jeder Knoten in X hat eine zugehörige Y-Kante, also muss es mindestens so viele gute Kanten geben, wie es Knoten in G gibt. Da wir bereits wissen, dass $|X| = 8$ ist und $|Y| \geq 9$ gilt, muss es also mindestens 17 gute Kanten - davon 8 Y-Kanten und mindestens 9 X-Kanten - in G_X geben.
   Wir zeigen nun, dass jedes Dreieck in G_X mindestens eine schlechte Kante enthält. Dann ergibt sich nämlich ein Widerspruch zur Folgerung aus dem Satz von Turán. Wenn wir den Subgraphen H von G_X betrachten, der nur noch aus den guten Kanten in G_X besteht, so hat H mindestens noch 17 Kanten. Weiterhin hat H genau $|X| = 8 > 3$ Knoten. Nun ist aber $8^2/4 + 1 = 17$, also enthält H ein Dreieck - das

nach Definition von H ausschließlich gute Kanten enthält. Das stellt aber einen Widerspruch dar, wenn es uns gelingt zu zeigen, dass jedes Dreieck in G_X mindestens eine schlechte Kante enthalten muss. Dann muss also unsere Annahme falsch sein, dass G nicht faktor-kritisch ist.

Wir zeigen also nun, dass jedes Dreieck in G_X mindestens eine schlechte Kante enthält. Auch das zeigen wir durch Widerspruch. Sei also $C = (x, y, z, x)$ ein Kreis der Länge drei, der keine schlechte Kante enthält, also ausschließlich gute Kanten enthält. Wir unterscheiden nun danach, ob C eine Y-Kante enthält oder nicht.
Falls C kein Y-Kante enthält, so handelt es sich bei jeder Kante um eine X-Kante. Wie bereits angemerkt ist jeder Knoten aus X mit einer Y-Kante assoziiert. Wir finden also für jeden Knoten $v \in V_C$ eine eindeutige Y-Kante $\{v_1, v_2\}$. Da diese Kante $G - v$ total dominiert, können weder v_1 noch v_2 adjazent zu v sein, also insbesondere nicht auf C liegen. Wir betrachten nun eine beliebige Kante $\{u, v\} \in C$, die ganz X dominieren muss, da jede Kante in C eine X-Kante ist. Weiterhin seien $\{v_1, v_2\}$ und $\{u_1, u_2\}$ die zu u und v gehörigen Y-Kanten. Da $\{u, v\}$ ganz X dominiert, aber u weder adjazent zu u_1 noch zu u_2 ist, muss v sowohl adjazent zu u_1, als auch zu u_2 sein. Umgekehrt ist v weder adjazent zu v_1 noch zu v_2, so dass für jedes Paar von Knoten u, v im Dreieck $\{u_1, u_2\} \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$ gilt. Insgesamt muss also gelten $\{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2\} \subseteq X \setminus V_C$, sowie $\{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, x, y, z\} \subseteq X$. Da hierbei kein Knoten doppelt gezählt wurde, muss also gelten $|X| \geq 9$, was aber einen Widerspruch darstellt zu Lemma 5.8, Teil 3.
Bleibt der Fall zu betrachten, dass es eine Y-Kante $\{x, y\}$ in C gibt. Jeder dieser Knoten muss genau 5 der 9 Komponenten von $G - X$ dominieren, anderenfalls gäbe es einen $K_{1,6}$ in G (x, y und je ein Knoten aus den fünf Komponenten, die derjenige Knoten dominiert, der fünf Komponenten dominiert). Also muss es eine Komponente geben, die sowohl von x, als auch von y dominiert wird, vier Komponenten, die nur von x, aber nicht von y dominiert werden und vier Komponenten, die nur von y, aber nicht von x dominiert werden. Für beide Überlegungen ist wichtig, dass x respektive y eine Komponente entweder dominieren, oder mit keinem Knoten aus der Komponente benachbart sind, sonst gäbe es wiederum einen $K_{1,6}$. Wäre nun $\{y, z\}$ tatsächlich eine gute Kante (wie wir vorausgesetzt haben), muss z mindestens drei der vier Komponenten dominieren, die von x aber nicht von y dominiert werden, sonst wären von $\{y, z\}$ mindestens zwei Komponenten nicht dominiert und es könnte sich nicht um eine gute Kante handeln. Analog gilt, wenn $\{x, z\}$ gute Kante ist - und auch das haben wir angenommen - dominiert z auch drei von vier Komponenten, die y dominiert, aber x nicht. Insgesamt dominiert z also mindestens 6 Komponenten von $G - X$, so dass es wieder einen $K_{1,6}$ in G gäbe, was im Widerspruch zur

Voraussetzung steht. Damit haben wir gezeigt, dass jedes Dreieck in G_X mindestens eine schlechte Kante enthalten muss. Insgesamt ist also die erste Behauptung des Satzes bewiesen und G ist faktor-kritisch.

2. Wir betrachten nun einen 3_tVC-Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten, wobei n gerade ist. Weiterhin sei $\delta(G) \geq 2$. Genau wie in Teil 1 sehen wir ein, dass G 2-zusammenhängend ist. Da n gerade ist, folgt daraus $q(G) = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass G ein perfektes Matching besitzt und nehmen hierzu wiederum das Gegenteil an, dass G also kein perfektes Matching besitzt, und führen dies zum Widerspruch. Nach Tuttes Matching Satz gibt es dann eine Teilmenge $X \subseteq V$, so dass $q(G - X) > |X|$ und da G gerade ist, folgt wie schon oft eingesehen, dass $q(G - X) \geq |X| + 2$, weil die Zahl der ungeraden Komponenten von $G - X$ gerade sein muss wenn $|X|$ gerade ist und ungerade sein muss, wenn $|X|$ ungerade ist. X kann auch nicht $\emptyset$ sein, da G zusammenhängend ist und somit keine ungerade Komponente enthält. Weiterhin können wir Lemma 5.9 anwenden und erhalten $8 \leq |X| \leq 9$ und $q(G-X) \leq 11$. Wie in Teil 1 bezeichne Y die Menge aller Knoten, die zu Komponenten von $G - X$ mit ungerader Knotenanzahl gehören. Weiterhin seien X-Kanten und Y-Kanten definiert wie in Teil 1 dieses Beweises und gute Kanten alle Kanten, die X- oder Y-Kanten sind und schlechte Kanten alle übrigen Kanten. Es sei wieder H der Teilgraph von G_X der sich ergibt, wenn man aus G_X alle schlechten Kanten entfernt. Wir beweisen nun eine Reihe von Hilfsaussagen, die wir anschließend verwenden können, um die Annahme, dass G kein perfektes Matching besitzt zum Widerspruch zu führen. $\overline{G_X}$ bezeichnet im Folgenden den Komplementgraphen von G_X, also den Graphen, der alle Knoten aus G_X enthält und in dem genau diejenigen Knoten adjazent sind, die in G_X nicht adjazent sind.

   (a) *G_X enthält mindestens $2|X| + 2$ gute Kanten:* Jeder Knoten in X ist mit einer eindeutigen Y-Kante assoziiert, das liefert also $|X|$ Y-Kanten. Weiterhin ist jeder Knoten in Y mit einer eindeutigen X-Kante assoziiert, das liefert also $|Y|$ X-Kanten. Da $|Y| \geq |X|+2$ gilt nach unseren Vorüberlegungen, muss G_X also mindestens $|X| + |X| + 2 = 2|X| + 2$ gute Kanten enthalten.

   (b) *Falls $q(G - X) = 11$, muss jedes Dreieck in G_X mindestens eine schlechte Kante enthalten:* Wir zeigen dies ähnlich wie in Teil 1 dieses Beweises durch Widerspruch. Sei also $C = (x, y, z, x)$ ein Dreieck in G_X und nehmen wir an, C enthalte keine schlechte Kante. G ist $K_{1,7}$-frei und daher kann jeder Knoten in C Knoten aus höchstens sechs Komponenten von $G - X$ dominieren. Gäbe es nämlich einen Knoten v, der zu Knoten aus 7 Komponenten adjazent ist, so wählen wir aus jeder Komponente einen zu v

adjazenten Knoten aus und erhalten so eine unabhängige Menge, in der jeder Knoten adjazent zu v ist, also einen $K_{1,7}$. $\{x, y\}$ haben wir wie jede Kante in C als gute Kante angenommen, also muss diese Kante mindestens die Knoten aus zehn Komponenten von $G - X$ dominieren (falls es sich um eine Y-Kante handelt sogar die Knoten aus elf Komponenten). Also muss x mindestens 4 Komponenten dominieren, die y nicht dominiert und andersherum. Somit gibt es höchstens 2 Komponenten, die sowohl von x als auch von y dominiert werden. Wir haben auch $\{x, z\}$ als gute Kante angenommen, da sie auf C liegt. Also muss z mindestens vier der fünf Komponenten von $G - X$ dominieren, die nicht von x dominiert werden, denn sonst gäbe es wieder zwei nicht dominierte Komponenten, aber $G-v-X$ für einen Knoten aus V kann höchstens eine der Komponenten aus $G-X$ weniger haben als $G-X$, was im Widerspruch dazu steht, dass $\{x, z\}$ eine gute Kante ist. Somit gibt es also mindestens drei Komponenten in $G-X$, die sowohl von y, als auch von z, aber nicht von x dominiert werden. Allerdings haben wir oben bereits gesehen, dass zwei adjazente Knoten in C nur zwei gemeinsame Komponenten dominieren können, also stellt dies einen Widerspruch dar und jedes Dreieck in G_X enthält tatsächlich mindestens einen schlechten Knoten, falls $q(G - X) = 11$ gilt.

(c) *Es gilt* $|X| = 8$*:* Aus dem zuvor bewiesenen Lemma wissen wir bereits, dass $|X| = 8$ und $|X| = 9$ die beiden einzigen Möglichkeiten sind. Wir nehmen also an, dass $|X| = 9$ gilt und führen dies zum Widerspruch, dann kann nur $|X| = 8$ gelten. Wenn $|X| = 9$ gilt, so liefert die Ungleichung $|X| + 2 \leq q(G - X) \leq 11$ aus der Vorüberlegung zum Beweis des zweiten Teils, dass $q(G - X) = 11$ gelten muss. Nach Hilfsaussage (a) enthält G_X weiterhin mindestens $2 \cdot 9 + 2 = 20$ gute Kanten. Dann hat der Graph H (G_X ohne die schlechten Kanten) 9 Knoten und $20 = \lfloor 9^2/4 \rfloor$ Kanten. Nach Hilfsaussage (b) wissen wir bereits, dass H kein Dreieck enthält. Dann besagt die Folgerung aus dem Satz von Turán, dass H nur der Graph $K_{4,5}$ sein kann. Wir nennen die beiden Partitionen von H im Folgenden X_1 mit $|X_1| = 4$ und X_2 mit $|X_2| = 5$. Da H ein Teilgraph von G_X ist, existieren alle Kanten die in H liegen auch in G_X.
Sei nun $x \in X_1$ ein Knoten maximalen Grades in G_{X_1}. Es sei daran erinnert, dass es keine guten Kanten in G_{X_1} geben kann, schlechte Kanten hingegen können durchaus innerhalb von X_1 verlaufen. Nach Lemma 5.9 muss gelten $D_x \subseteq X$, aber zudem muss $x \notin D_x$ sein und D_x den Knoten x nicht dominieren, weil das einen Widerspruch zu $\gamma_t(G) = 3$ wäre (vgl. Lemma 5.1). Weiterhin

liefert Lemma 5.1, dass $D_x \cap N(x) = \emptyset$ gelten muss, also kann kein Knoten von D_x in X_2 liegen. Daher gilt $D_x \subseteq X_1 \setminus \{x\}$. Also bleibt nur noch ein Knoten aus X_1 übrig, zu dem x adjazenzt sein kann (X_1 enthält vier Knoten, einer ist x, zwei sind in D_x und nur der vierte Knoten kann adjazent zu x sein), es gilt also $d_{X_1}(x) = 1$. Weiterhin gilt aber $D_x \succ_t X_1 \setminus \{x\}$, also muss einer der zwei Knoten aus D_x adjazent nicht nur zum anderen Knoten aus D_x sein, sondern zudem zum verbleibenden Knoten in $X_1 \setminus D_x \setminus \{x\}$. Dieser Knoten hat also Grad $2 > 1$, was im Widerspruch zur Maximalität des Grades von x steht.

(d) *Es gilt $q(G-X) = 10$:* Wir wissen bereits, dass $|X| = 8$, also $10 \leq q(G-X) \leq 11$. Also reicht es, zu zeigen, dass nicht $q(G-X) = 11$ gelten kann. Nehmen wir zwecks Widerspruch an, das $q(G-X) = 11$ gilt. Nach Teil (a) enthält G mindestens $2 \cdot 8 + 2 = 18$ gute Kanten. H hat also $|X| = 8$ Knoten und 18 Kanten. Also enthält H nach der Folgerung aus Turáns Satz ein Dreieck. Dann gibt es also in G_X ein Dreieck, das nur gute Kanten enthält, was einen Widerspruch zu Hilfsaussage (c) steht.

(e) *Es gelten $\delta(\overline{G_X}) \geq 2$, $n_{\overline{G_X}} = 8$ und $8 \leq m_{\overline{G_X}} \leq 10$:* Die erste Teilaussage folgt direkt aus Lemma 5.9, Teil 1, denn jeder Knoten in G_X ist zu mindestens zwei anderen Knoten in X nicht adjazent. Die zweite Teilaussage haben wir in Hilfsaussage (c) bewiesen, denn offensichtlich gilt $|X| = n_{\overline{G_X}}$. Da $\delta(\overline{G_X}) \geq 2$ gilt, hat also jeder Knoten in $\overline{G_X}$ mindestens Grad 2, so dass jeder Knoten mindestens eine Kante zur Gesamtzahl der Kanten in $\overline{G_X}$ beiträgt. Also gilt $m_{\overline{G_X}} \geq 8$. Schließlich gibt es in G_X mindestens 18 gute Kanten nach Hilfsaussage (a). Da ein Graph mit 8 Knoten maximal $8 \cdot 7/2 = 28$ Kanten haben kann, bleiben nur höchstens $28 - 18 = 10$ potentielle Kanten für $G_{\overline{X}}$ übrig.

(f) *$\overline{G_X}$ enthält keinen Kreis der Länge 3 oder 4:* Wir nehmen wieder das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch. Zunächst zeigen wir, dass es kein Dreieck gibt. Sei also $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ ein Dreieck in $\overline{G_X}$. Weiterhin bezeichne für $i = 1, 2, 3$ die Größe $d_i = d_{\overline{G_X}}(x_i)$ den Grad von x_i in $\overline{G_X}$. Da $D_{x_1} \subseteq X$ (Lemma 5.9, Teil 2), gibt es eine Kante in X, die jeden Knoten aus X außer x_1 dominiert. Wäre nun $d_1 = 2$, so gäbe es nur zwei Knoten in G_X, die nicht adjazent zu x_1 sind. Wir wissen bereits, dass x_2 und x_3 nicht adjazent zu x_1 sind, also ist $\{x_2, x_3\}$ der einzige Kandidat für eine Kante zwischen zwei Knoten aus X, die nicht adjazent zu x_1 sind. Da wir aber zudem wissen, dass $\{x_2, x_3\} \in \overline{G_X}$ richtig ist, wissen wir auch, dass $\{x_2, x_3\}$ keine Kante in G_X ist. Daher kann es insgesamt in G_X keine Kante geben, die $G - x_1$ dominiert, was allerdings einen Widerspruch darstellt. Also gilt sicher $d_1 \geq 3$.

Mit der gleichen Argumentation zeigen wir auch, dass $d_2 \geq 3$ und $d_3 \geq 3$. Hilfsaussage (e) liefert $\delta(\overline{G_X}) \geq 2$ und daher gilt $2|E_{\overline{G_X}}| \geq \sum_{x \in X} d_{\overline{G_X}}(x) \geq 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 19$, also ist $m_{\overline{G_X}} \geq 10$ und zusammen mit Hilfsaussage (e) ergibt sich schließlich $m_{\overline{G_X}} = 10$. Da wir bereits festgestellt haben, dass $d_{\overline{G_X}}(x_i) \geq 3$ für $i = 1, 2, 3$ gilt, können wir Knoten $v_i \in N_{\overline{G_X}}(x_i) \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ für alle $i = 1, 2, 3$ auswählen. Wir unterscheiden nun nach der Kardinalität von $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Fall 1: $|\{v_1, v_2, v_3\}| = 3$: Falls $d_1 + d_2 + d_3 \geq 9 + 2 = 11$ gilt, ist $2m_{\overline{G_X}} \geq 19 + 2 = 21$, also $m_{\overline{G_X}} > 10$. Das steht aber im Widerspruch zu Hilfsaussage (e). Also kann höchstens ein Knoten mit $d_i \geq 4$ existieren und dieser muss dann auch genau den Wert $d_i = 4$ tragen. Gegebenenfalls nach Umnummerierung der x_i und d_i können wir annehmen, dass $d_1 = d_2 = 3$ gilt und $d_3 \in \{3, 4\}$ richtig ist. Nun kann höchstens eine der Kanten $\{v_1, x_3\}$ und $\{v_2, x_3\}$ zu $\overline{G_X}$ gehören. Gegebenenfalls nach Austauschen der Bezeichnungen von x_1 und x_2 können wir davon ausgehen, dass $\{v_1, x_3\}$ nicht in $\overline{G_X}$ liegt. Also wissen wir, dass die Kanten $E^* = \{\{v_1, x_2\}, \{v_1, x_3\}, \{v_2, x_1\}, \{v_3, x_1\}, \{v_3, x_2\}\}$ zu G gehören. Wählen wir eine beliebige Kante $\{v_i, x_j\} \in E^*$, so wissen wir, dass diese Kante den Knoten x_i nicht dominiert, denn x_i ist nicht adjazent zu v_i und die Knoten x_i und x_j liegen im Dreieck in $\overline{G_X}$, sind also ebenfalls nicht adjazent in G_X. Nun ist für so eine Kante zweierlei möglich. Entweder es handelt sich um die gute Kante des Knotens x_i, oder aber es ist eine schlechte Kante. Da jeder Knoten nur eine gute Kante hat, können höchstens drei Kanten in E^* gut sein. Es bleiben also mindestens zwei schlechte Kanten übrig. Zusammen mit den zehn Nicht-Kanten und den 18 guten Kanten (Teil (a)) erhalten wir also mindestens 30 Kanten und Nicht-Kanten, so viele Knotenpaare gibt es aber bei 8 Knoten nicht. Also ergibt sich ein Widerspruch.

Fall 2: $|\{v_1, v_2, v_3\}| = 2$: O.B.d.A nehmen wir an, dass (möglicherweise nach Umbenennung) $v_1 = v_2$ gilt. Es muss eine Kante in G_X geben, deren beide Endpunkte in $\overline{G_X}$ Nachbarn von x_1 sind und die $G - x_1$ dominiert. Falls $d_1 = 3$ gilt, ist der einzige Kandidat hierfür $\{v_1, x_3\}$, denn v_1 und x_2 sind in $\overline{G_X}$ adjazent, also ist $\{v_1, x_2\}$ keine Kante in G_X und gleiches gilt für die Knoten x_2 und x_3. Doch da weder v_1 noch x_3 adjazent zu x_2 ist, wird von dieser Menge x_2 nicht dominiert, also gibt es keine total dominierende Kante für $G - x_1$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht, dass G 3_tVC ist. Also muss $d_1 \geq 4$ sein. Analog erhalten wir auch $d_2 \geq 4$, also $d_1 + d_2 + d_3 \geq 4 + 4 + 3 = 11$ und damit $2n_{\overline{G_X}} \geq 21$ (vgl. Fall 1), also $n_{\overline{G_X}} \geq 10$, was im Widerspruch zu Hilfsaussage (e) steht.

Fall 3: $|\{v_1, v_2, v_3\}| = 1$: So wie wir in Fall 2 $d_1 \geq 4$ gezeigt haben, können wir in diesem Fall $d_1 \geq 4$, $d_2 \geq 4$ und $d_4 \geq 4$ zeigen, was wieder einen zu großen Wert für $n_{\overline{G_X}}$ ergibt.
Da wir alle drei möglichen Fälle zum Widerspruch geführt haben, kann es also tatsächlich kein Dreieck in $\overline{G_X}$ also tatsächlich geben.

Nun zeigen wir, ebenfalls durch Widerspruch, noch, dass es keinen Kreis der Länge 4 geben kann. Nehmen wir also an, es gäbe einen Kreis $C = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$ der Länge 4 in $\overline{G_X}$ und sei d_i wieder definiert wie im Beweis, dass es kein Dreieck in $\overline{G_X}$ gibt. Falls $d_1 = 2$ ist, kann es nur eine Kante in G_X geben, die $G - x_1$ dominiert, $\{x_2, x_4\}$, da diese beiden Knoten die einzigen nicht zu x_1 adjazenten Knoten wären. Allerdings sind x_2 und x_4 auch nicht adjazent zu x_3, also handelt es sich hierbei ebenfalls nicht um eine dominierende Kante für $G - x_1$. Das stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass G 3_tVC ist. Also ist $d_1 \geq 3$ und analog $d_2 \geq 3$, $d_3 \geq 3$ und $d_4 \geq 3$. Nach Hilfsaussage (e) ist $\delta(\overline{G_X}) \geq 2$, also ist $2n_{\overline{G_X}} \geq \sum_{x \in X} d_{\overline{G_X}}(x) \geq 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 20$ beziehungsweise $n_{\overline{G_X}} \geq 10$. Nach Hilfsaussage (e) muss dann sogar $\overline{G_X} = 10$ gelten. Also enthält G_X $7 \cdot 8/2 - 10 = 18$ Kanten. Nach Hilfsaussage (1) gibt es aber mindestens 18 gute Kanten, also müsste jede Kante gut sein. Wir wissen aber auch, dass $\{x_1, x_3\} \in E_G$ sein muss, denn sonst gäbe es ein Dreieck (x_1, x_2, x_3, x_1) in $\overline{G_X}$. Diese Kante dominiert aber weder x_2 noch x_4, ist also eine schlechte Kante, was einen Widerspruch dazu darstellt, dass alle Kanten gut sind.

(g) $\overline{G_X}$ *ist nicht 2-regulär:* Auch diese Aussage zeigen wir mittels eines Widerspruchsbeweises. Nehmen wir also an, $\overline{G_X}$ wäre 2-regulär. Da es keine Kreise der Länge ≤ 4 gibt (Hilfsaussage (f)), $\overline{G_X}$ aber genau 8 Knoten enthält, muss $\overline{G_X}$ ein Kreis der Länge 8 sein. Gegebenenfalls nach Umnummerierung der x_i können wir annehmen, dass der Kreis $(x_1, x_2, ..., x_8, x_1)$ ist. Wir wissen bereits, dass es 8 Y-Kanten geben muss. Da diese jeweils einen Knoten aus x nicht überdecken dürfen, kommen nur acht Kanten hierfür in Frage, die Kanten $\{x_i, x_{i+2}\}$, wobei die Indizes modulo 8 gerechnet werden müssen (und die 8 statt der 0 als Repräsentant der Klasse $[0]_8$ gewählt werden muss).
Wir betrachten nun die Menge

$$E' = \{\{x_1, x_5\}, \{x_2, x_6\}, \{x_3, x_7\}, \{x_4, x_8\}\} \subseteq E$$

Da es mindestens 18 gute Kanten in G_X und 8 nicht-Kanten gibt, können höchstens noch zwei schlechte Kanten in G_X existieren. Insbesondere können also auch in E' nur zwei schlechte Kanten sein. Also sind mindestens zwei Kanten in E' X-Kanten. Gegebenenfalls nach Umbenennung der Knoten können wir davon ausgehen, dass $\{x_1, x_5\}$ eine X-Kante ist. Da G keinen $K_{1,7}$-Subgraphen besitzt, sind x_1 und x_3 adjazent zu Knoten aus höchstens sechs verschiedenen Komponenten von $G - X$. Weiterhin sind $\{x_1, x_3\}$ und $\{x_3, x_5\}$ Y-Kanten, wie wir weiter oben bereits festgestellt haben. Als solche dominieren x_1 und x_5 alle Komponenten von $G - X$, die nicht adjazent zu x_3 sind. Derer gibt es mindestens vier (vgl. Hilfsaussage (d)). Daher kann die Kante $\{x_1, x_5\}$ höchstens $6 + 6 - 4 = 8$ Komponenten von $G - X$ dominieren, es bleiben also 2 Komponenten nicht dominiert. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme, das $\{x_1, x_5\}$ eine X-Kante ist.

Mit diesen Aussagen ist es uns nun möglich, auch die zweite Aussage des Satzes zu beweisen. Sei $x \in X$ beliebig und $u, v \in N_{\overline{G_X}}(x)$. Nach Hilfsaussage (f) ist $\{u, v\} \notin E_{\overline{G_X}}$, da $\overline{G_X}$ sonst ein Dreieck enthielte. Also ist $\{u, v\} \in E$. Wir setzen nun $E(x) = \{\{u, v\} | u, v \in N_{\overline{G_X}}(x)\}$. Dann ist $E(x) \subseteq E$ für alle Knoten $x \in X$, weil jede einzelne Kante in $E(x)$ nach obiger Überlegung in E liegt. Weiterhin sei $E' = \cup_{x \in X} N_{\overline{G_X}}(x)$ gesetzt. Da es nach Hilfsaussage (f) keine Kreise der Länge vier gibt, muss auch gelten $E(x) \cap E(x') = \emptyset$ für verschiedene Knoten $x, x' \in X$. Gäbe es nämlich für ein Knotenpaar x, x' eine Kante $\{u, v\} \in E(x) \cap E(x')$, so gäbe es in $\overline{G_X}$ den Kreis (x, u, x', v, x) der Länge vier. Offensichtlich handelt es sich bei keiner Kante in E' um eine X-Kante, denn jede Kante dominiert mindestens einen Knoten in X nicht. Also sind alle X-Kanten in $E_{G_X} \setminus (\overline{G_X} \cup E')$. Nach Hilfsaussage (g) hat nicht jeder Knoten in $\overline{G_X}$ den Grad 2, nach Lemma 5.9 hat zudem jeder Knoten in $\overline{G_X}$ mindestens den Grad 2, also gibt es zumindest zwei Knoten des Grades 3 oder einen Knoten des Grades 4 in $\overline{G_X}$. In beiden Fällen gilt $|E'| \geq 2 \cdot 3 + 6 = 12$. Zudem wissen wir, wieder wegen Hilfsaussage (g) und Lemma 5.9, dass $n_{\overline{G_X}} \geq 9$ richtig ist, also gibt es höchstens $28 - 9 - 12 = 7$ X-Kanten in G_X, was im Widerspruch zu $|Y| \geq 9$ steht. Also kann es einen solchen Graphen ohne perfektes Matching nicht geben und der Satz ist bewiesen.

□

Anhand zweier Beispiele wollen wir nun unsere Ergebnisse des gerade bewiesenen Satzes verifzieren.

Beispiel 5.11 *Wir beginnen wieder mit dem Fall eines 3_tEC-Graphen mit ungerade vielen Knoten. Hierzu betrachten wir den Graphen C_5, einem Kreis mit fünf Knoten (ein $K_{1,6}$ kann nicht Teilgraph des Graphen sein, da er zu wenig Knoten dazu besitzt). Wir haben bereits gesehen, dass dieser Graph die totale Dominanzzahl* 3 *hat. Entfernen wir einen Knoten aus dem Graphen, so erhalten wir den Weg von vier Knoten und um diesen zu dominieren, reichen offenbar die beiden inneren Knoten aus.*

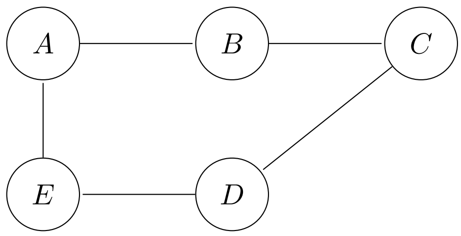

Abbildung 20: C_5

Entfernen wir nun einen beliebigen Knoten aus C_5, so erhalten wir einen Graphen, der ein perfektes Matching enthält, wie man in der folgenden Grafik erkennen kann:

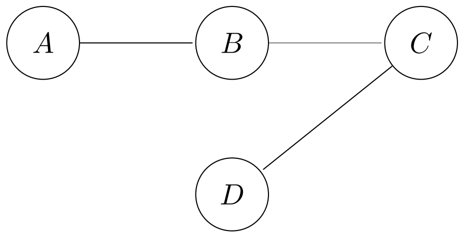

Abbildung 21: $C_5 - v$ mit Matching

C_5 ist also wie im Satz vorhergesagt Faktor-kritisch.
Als zweites Beispiel betrachten wir den Graphen, den wir bereits als Beispiel für einen Knoten-kritischen Graphen kennen gelernt haben:

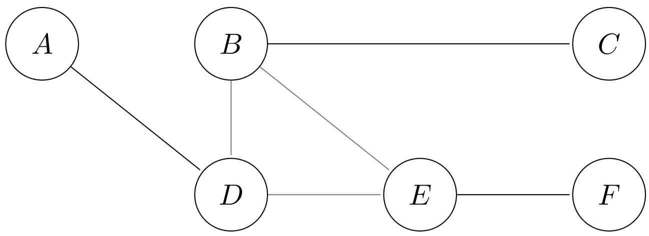

Abbildung 22: 3-Knoten-kritischer Graph mit eingezeichnetem perfekten Matching

Der Graph hat eine gerade Knotenanzahl und so besagt unser gerade bewiesener Satz (ein $K_{1,7}$ kann nicht Teilgraph des Graphen sein, da er zu wenig Knoten dazu besitzt), dass der Graph ein perfektes Matching enthalten muss. In der Tat, die im Graphen schwarz gezeichneten Kanten $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{E, F\}$ bilden ein perfektes Matching.

Schließlich werden wir [4] folgend zeigen, dass die Ergebnisse des obigen Satzes nicht weiter verbessert werden können. Wir werden zudem zeigen, dass die folgenden Gegenbeispiele gleichzeitig zeigen, dass beim Lockern der Bedingungen des Satzes auch nicht zwingend mehr ein perfekter $[1,2]$-Faktor gefunden werden kann, so dass auch der Verzicht auf eine gewisse Güte des Ergebnisses keine Verallgemeinerung des Satzes mehr erlaubt.

Beispiel 5.12 *Wir geben nun einen 3_tVC-Graphen an, der ungerade viele Knoten hat, $\delta(G) \geq 5$ erfüllt und keinen $K_{1,7}$ als Subgraphen enthält. Hierzu seien $X = \{x_1, x_2, ..., x_8\}$ und $Y = \{y_1, y_2, ..., y_9\}$. Der Graph $G = (V, E)$ habe die Knotenmenge $V = X \cup Y$ und Y sei eine unabhängige Menge in G. Andererseits enthalte G_X alle Kanten außer $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, ..., \{x_7, x_8\}, \{x_8, x_1\}$. Weiterhin sei*

- *x_1 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_4, y_5, y_6*
- *x_2 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_1, y_2, y_3*
- *x_3 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_3, y_7, y_9*
- *x_4 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_6, y_7, y_8*
- *x_5 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_1, y_5, y_6*
- *x_6 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_1, y_3, y_4*
- *x_7 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_2, y_8, y_9*
- *x_8 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_5, y_7, y_8*

G enthält einen $K_{1,6}$, beispielsweise x_2 zusammen mit $y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$, enthält aber keinen $K_{1,7}$, denn jeder Knoten in X ist adjazent zu drei Knoten in Y und es gibt keine zwei Knoten in X, so dass diese zu keinem Knoten in Y gemeinsam adjazent sind.
Weiterhin gilt $\gamma_t(G) = 3$, denn $\{x_1, x_3, x_5\} \succ_t G$, da diese drei alle Knoten in Y dominieren, zueinander adjazent sind, also sich untereinander total dominieren und zudem dominiert x_1 die Knoten x_4, x_6, x_7 und x_5 dominiert die Knoten x_2, x_8. Wählt man nur zwei Knoten aus X aus, so erhält man hingegen offensichtlich keine totale Dominanzmenge, denn jedes Paar von adjazenten Knoten in X lässt einen gemeinsamen Knoten in Y aus (wenn die Indizes sich um mindestens den Wert 3 unterscheiden, hier und im Folgenden sind die Indizes immer modulo 8 zu verstehen und als Repräsentant für $[0]_8$ die 8 zu wählen), lassen einen gemeinsamen Knoten in X aus (wenn die Indizes sich um den Wert 2 unterscheiden), oder aber sind nicht adjazent (wenn die Indizes sich um den Wert 1 unterscheiden). Kanten mit einem Endpunkt in Y dominieren gleich drei Knoten aus Y nicht. Schließlich ist G sogar 3_tVC, denn wenn wir einen Knoten aus $x_i \in X$ entfernen, so können wir G durch die Kante $\{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ total dominieren. Lassen wir andererseits einen Knoten aus Y aus, so erhalten wir wie folgt eine totale Dominanzmenge für den Rest von G:

- $\{x_2, x_5\} \succ_t G - y_1$
- $\{x_2, x_7\} \succ_t G - y_2$
- $\{x_3, x_6\} \succ_t G - y_3$
- $\{x_1, x_6\} \succ_t G - y_4$
- $\{x_5, x_8\} \succ_t G - y_5$
- $\{x_1, x_4\} \succ_t G - y_6$
- $\{x_3, x_8\} \succ_t G - y_7$
- $\{x_4, x_7\} \succ_t G - y_8$
- $\{x_3, x_7\} \succ_t G - y_9$

Dass G nicht faktor-kritisch ist, sehen wir mit dem Satz über faktor-kritische Graphen ein, denn $q(G - X) = |Y| = |X| + 1 > |X|$. Weiterhin enthält G auch keinen perfekten $[1, 2]$-Faktor wie wir mit dem Faktor-Satz von Tutte einsehen können. Es gilt nämlich $N(Y) = X$, aber $|Y| > |X|$.

Beispiel 5.13 *Wir geben nun einen 3_tVC-Graphen an, der gerade viele Knoten hat, $\delta(G) \geq 5$ erfüllt und keinen $K_{1,8}$ als Subgraphen enthält. Hierzu seien $X = \{x_1, x_2, ..., x_8\}$ und $Y = \{y_1, y_2, ..., y_{10}\}$. Der Graph $G = (V, E)$ habe die Knotenmenge $V = X \cup Y$ und Y sei eine unabhängige Menge in G. Andererseits enthalte G_X alle Kanten außer $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, ..., \{x_7, x_8\}, \{x_8, x_1\}$. Weiterhin sei*

- *x_1 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_4, y_5, y_6*
- *x_2 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_1, y_2, y_3*
- *x_3 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_3, y_7, y_9*
- *x_4 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_6, y_8, y_{10}*
- *x_5 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_1, y_5, y_6*
- *x_6 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_1, y_3, y_4*
- *x_7 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_2, y_8, y_9*
- *x_8 adjazent zu allen Knoten in Y außer y_5, y_7, y_{10}*

G enthält einen $K_{1,7}$, beispielsweise x_2 zusammen mit $y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$ und y_{10}, enthält aber keinen $K_{1,8}$, denn jeder Knoten in X ist nicht adjazent zu drei Knoten in Y und es gibt keine zwei Knoten in X, so dass diese zu keinem Knoten in Y gemeinsam adjazent sind.

Weiterhin gilt $\gamma_t(G) = 3$, denn $\{x_1, x_3, x_5\} \succ_t G$, da diese drei alle Knoten in Y dominieren, zueinander adjazent sind, also sich untereinander total dominieren und zudem dominiert x_1 die Knoten x_4, x_6, x_7 und x_5 dominiert die Knoten x_2, x_8. Wählt man nur zwei Knoten aus X aus, so erhält man hingegen offensichtlich keine totale Dominanzmenge, denn jedes Paar von adjazenten Knoten in X lässt einen gemeinsamen Knoten in Y aus (wenn die Indizes sich um mindestens den Wert 3 unterscheiden, hier und im Folgenden sind die Indizes immer modulo 8 zu verstehen und als Repräsentant für $[0]_8$ die 8 zu wählen), lassen einen gemeinsamen Knoten in X aus (wenn die Indizes sich um den Wert 2 unterscheiden), oder aber sind nicht adjazent (wenn die Indizes sich um den Wert 1 unterscheiden). Kanten mit einem Endpunkt in Y dominieren gleich drei Knoten aus Y nicht. Schließlich ist G sogar 3_tVC, denn wenn wir einen Knoten aus $x_i \in X$ entfernen, so können wir G durch die Kante $\{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ total dominieren. Lassen wir andererseits einen Knoten aus Y aus, so erhalten wir wie folgt eine totale Dominanzmenge für den Rest von G:

- $\{x_2, x_5\} \succ_t G - y_1$
- $\{x_2, x_7\} \succ_t G - y_2$
- $\{x_3, x_6\} \succ_t G - y_3$
- $\{x_1, x_6\} \succ_t G - y_4$
- $\{x_5, x_8\} \succ_t G - y_5$
- $\{x_1, x_4\} \succ_t G - y_6$
- $\{x_3, x_8\} \succ_t G - y_7$
- $\{x_4, x_7\} \succ_t G - y_8$
- $\{x_3, x_7\} \succ_t G - y_9$
- $\{x_4, x_8\} \succ_t G - y_{10}$

Dass G kein perfektes Matching besitzt, sehen wir mit dem Matching-Satz von Tutte ein, denn $q(G - X) = |Y| = |X| + 2 > |X| + 1$. Weiterhin enthält G auch keinen perfekten $[1, 2]$-Faktor wie wir mit dem Faktor-Satz von Tutte einsehen können. Es gilt nämlich $N(Y) = X$, aber $|Y| > |X|$.

6 Fazit und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit die Graph-Klassen der totale Dominanz Knoten-kritischen Graphen und der totale Dominanz Kanten-kritischen Graphen mit totaler Dominanzzahl 3 untersucht und insbesondere deren Eigenschaften in Bezug auf die Faktor-Theorie betrachtet. Es hat sich herausgestellt, dass Kanten-kritische Graphen in Bezug auf die Faktor-Theorie sehr gutartig sind. Besitzt G einen End-Knoten, so besitzt G auch einen perfekten $[1, 2]$-Faktor, besitzt G keinen End-Knoten, hat aber ungerade viele Knoten, so ist G faktor-kritisch und falls G gerade viele Knoten besitzt, besitzt G auch ein perfektes Matching.
Weniger schön stellt sich die Situation bei Knoten-kritischen Graphen dar. Auch in diesem Fall haben wir zwar gezeigt, dass es perfekte Matchings gibt, wenn gewisse Zusatzvoraussetzungen erfüllt sind und unter ähnlichen Zusatzvoraussetzungen der Graph faktor-kritisch ist, wir haben aber auch gesehen, dass wir diese Bedingungen nicht weiter lockern können. Zudem haben wir gesehen, dass wir auch nicht unbedingt einen perfekten $[1, 2]$-Faktoren finden können, wenn wir die Bedingungen lockern.
Weitere Betrachtungen könnten sich um verschiedene Probleme kümmern. Zunächst könnte man noch weitere Faktor-Klassen untersuchen, um möglicherweise auch für weitere Knoten-kritische Graphen faktortheoretische Ergebnisse zu erhalten. Zudem haben wir uns in dieser Arbeit auf Graphen mit totaler Dominanzzahl 3 beschränkt. Möglicherweise kann man vergleichbare Ergebnisse auch für Graphen mit höheren Dominanzzahlen finden. Da mit steigender Dominanzzahl aber die Kantenzahl tendentiell sinkt, ist zumindest davon auszugehen, dass die Ergebnisse weniger schön sein werden als für $\gamma_t(G) = 3$.

7 Quellen

Literatur

[1] Reinhard Diestel, editor. *Graphentheorie*. Springer, 2000.

[2] Michael R. Garey and David S. Johnson, editors. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.

[3] Wayne Goddard, Teresa W. Haynes, Michael A. Henning, and Lucas C. van der Merwe. The diameter of total domination vertex critical graphs. *Discrete Math.*, (286):255–261, 2004.

[4] Michael A. Henning and Anders Yeo. Perfect Matchings in Total Domination Critical Graphs. *erscheint in Graphs and Combinatorics*.

[5] Sebastian Küpper. Bachelorarbeit Algorithmen für Baum- und Pfadzerlegungen von Graphen, 2010.

[6] J. Simmons. Closure operations and hamiltonian properties of independent and total domination critical graphs, ph.d. thesis. phd advisor: Gary macgillvray, 2005.

[7] Lucas C. van der Merwe, Teresa W. Haynes, and C.M. Mynhardt. Total domination edge critical graphs. *Utilitas Mathematica*, (54):229–240, 1998.

[8] Xinlong Zhou. Graphen und Digraphen, 2004.

[9] Xinlong Zhou. Graphenalgorithmen, 2004.

8 Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungskommission vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Duisburg, den 19.12.2011